

TEMA 9

Estàtica dels cossos rígids.

Condicions d'equilibri.

Màquines.

Influència en el desenvolupament social.

9.1 Estàtica dels cossos rígids

9.1.1 Condicions d'equilibri

9.1.2 Equilibri en camps conservatius. Equilibri estable i inestable

9.2 Màquines. Característiques generals

9.3. Màquines simples

9.3.1 La palanca

9.3.2 Roda i Eix (Torn)

9.3.3. La politja

9.3.4 El pla inclinat

9.3.5 El tascó

9.3.6 El cargol

9.4 Màquines compostes

9.4.1 El polipast

9.4.2. El Muntacàrregues

9.4.3 Engranatges

9.4.4. Politges i corretges. Transmissió per cadenes o corretges dentades

9.5 Influència en el desenvolupament social

9

Estàtica dels cossos rígids. Condicions d'equilibri. Màquines. Influència en el desenvolupament social.

9.1 Estàtica dels cossos rígids

9.1.1 Condicions d'equilibri

Per a una única partícula, la condició d'equilibri és que la suma de totes les forces que hi actuen sigui zero.

En un sòlid rígid, aquesta condició també és necessària, però no suficient. Si la suma de forces externes és nula, sabem que el centre de masses romandrà en repòs. Però encara hi ha la possibilitat de què es produeixin moviments de gir. Caldrà aleshores afegir una altra condició, que la suma dels moments externs sigui nul. D'aquesta manera ni el CM es pot moure ni es pot produir cap moviment de gir, de manera que el cos rígid ha d'estar necessàriament en repòs (descartem que es mogui a velocitat constant). Escrivim aleshores les equacions cardinals de l'estàtica:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F}_{ext} &= 0 \\ \sum \mathbf{M}_{ext} &= 0\end{aligned}$$

9.1.2 Equilibri en camps conservatius. Equilibri estable i inestable

Si cadascuna de les forces externes és una força conservativa, aleshores es pot escriure com el gradient d'una funció energia potencial. Sigui V la suma de totes les funcions potencials. Aleshores s'haurà de verificar que el seu gradient és zero, és a dir, l'energia potencial haurà de ser màxima o mínima.

Si l'energia potencial és mínima, voldrà dir que si el sistema es desplaça de la seva posició (desplaçament virtual, a temps constant) l'energia augmenta, és a dir, el sistema s'ha d'enfrontar a forces que tendeixen a restablir la posició del cos. En aquest cas diem que el cos es troba en equilibri estable.

Si el potencial és màxim, la situació és la contrària, si el cos es desplaça mínimament, apareixen forces que desplacen el cos respecte de la posició d'equilibri, i parlem aleshores d'equilibri inestable.

9.2 Màquines. Característiques generals

Les màquines són instruments destinats a transmetre i modificar forces. Una màquina pot transformar una força petita en una de gran, o a l'inversa, convertir una força gran en una petita. També hi ha la possibilitat de que el mòdul de les forces romanguin invariables. Les màquines també poden modificar la direcció i el sentit en què actuen les forces.

Aquest procés de transformació de forces haurà de respectar el principi de conservació de l'energia, el qual imposa certes condicions a la transformació de forces. Anomenarem la força que fa moure la màquina esforç (E) i la que s'oposa s'anomena resistència o càrrega (C). Si l'energia s'ha de conservar, el treball efectuat per les dues forces ha de ser el mateix (suposem en principi que no hi ha pèrdues degudes a fregaments o altres motius). Sigui l_E el desplaçament del punt d'aplicació de la força E i l_C el desplaçament del punt d'aplicació de la força C . Si els desplaçaments són paral·lels a les forces, aleshores s'haurà de verificar que:

$$W = l_E \cdot E = l_C \cdot C$$

Anomenarem avantatge mecànic " i ", al cocient entre la resistència i l'esforç. De l'expressió anterior deduïm que:

$$i = \frac{C}{E} = \frac{l_E}{l_C}$$

D'aquí en treiem una conclusió fonamental: si volem una màquina amb $i > 1$, és a dir, una màquina que permeti multiplicar la nostra força, el preu que haurem de pagar és que el desplaçament que haurem de fer per moure la càrrega serà i vegades més gran que el que durà a terme la càrrega. Aquest és el principi en què es fonamenten totes les màquines. Si derivem la primera equació respecte del temps, obtenim la potència:

$$P = v_E \cdot E = v_C \cdot C$$

Per tant, com es d'esperar:

$$i = \frac{C}{E} = \frac{v_E}{v_C}$$

La càrrega es mou i vegades més lentament que el punt d'aplicació de l'esforç. Per guanyar força hem de perdre velocitat. De vegades, però també interessa que $i < 1$, d'aquesta manera es guanya velocitat al preu de perdre força.

En el cas particular de que la màquina transmeti un moviment circular, aleshores és més convenient parlar de moments, angles i velocitats angulars:

$$W = M_E \cdot \alpha_E = M_C \cdot \alpha_C \quad P = M_E \cdot \omega_E = M_C \cdot \omega_C$$

$$i = \frac{M_C}{M_E} = \frac{\alpha_E}{\alpha_C} = \frac{\omega_E}{\omega_C}$$

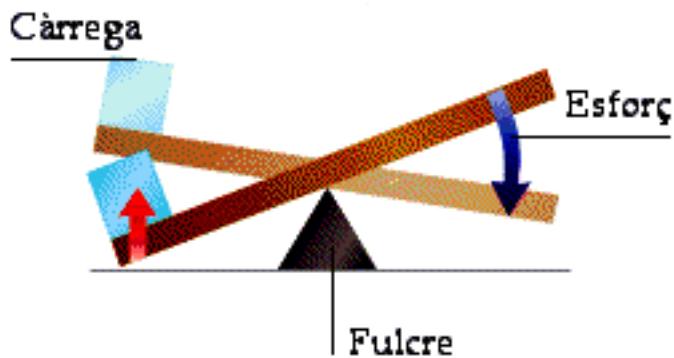
De la mateixa manera que és possible obtenir forces més grans o més petites també és possible obtenir moments més grans o més petits, a costa de la pèrdua de velocitat angular. O podem guanyar velocitat angular a costa de la pèrdua de moment.

S'anomena màquina simple la que està constituïda per un sol cos sòlid. S'anomena màquina composta la que és una combinació de màquines simples. Estudiarem primer les màquines simples i després les compostes.

9.3. Màquines simples

En l'antiguitat es consideraven que les màquines simples eren 5: la palanca, la roda, el pla inclinat, la rosca i el tascó, encara que aquestes dues últimes són casos particulars de la tercera.

9.3.1 La palanca



La palanca és un sòlid, normalment de forma allargada, que gira al voltant d'un punt fix, que s'anomena fulcre.

S'anomenen braços a les distàncies existents des del fulcre fins al punts on es s'exerceixen les forces. Sigui "e" el braç de l'esforç i "c" el braç de la càrrega.

Per a que la palanca estigui en equilibri s'ha de verificar que la suma de moment sigui zero, és a dir:

$$E \cdot e = C \cdot c$$

L'avantatge mecànic:

$$i = \frac{C}{E} = \frac{e}{c}$$

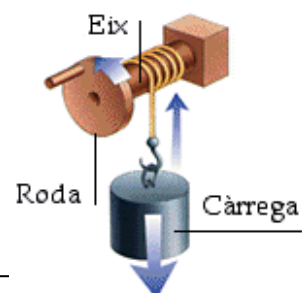
Per tant, com més llarg és el braç de l'esforç menor haurà de ser l'esforç necessari per vèncer la resistència.

Hi ha tres tipus o graus de palanques:

1. De primer grau: el fulcre està situat entre el punt d'aplicació de l'esforç i de la resistència. Exemples: Tenalles, tisores, balances.
2. De segon grau: El punt d'aplicació de la resistència es troba entre el fulcre i el punt d'aplicació de l'esforç. Sempre $i > 0$. Exemples: La carreta, el trencanous.
3. De tercer grau: El punt d'aplicació de l'esforç es troba entre el fulcre i el punt d'aplicació de l'esforç. Sempre $i < 0$. Exemple: Les pinces, en el propi cos humà, als braços i les cames.

9.3.2 Roda i Eix (Torn)

El torn és un cilindre de radi r a on està enrotllada una corda de la que penja la resistència. El cilindre està unit a una roda de radi $R > r$ a on s'aplica l'esforç. La condició d'equilibri implica que els moments coincideixin:



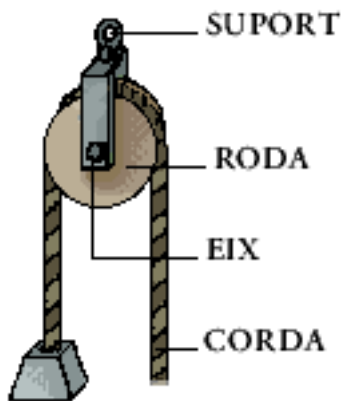
$$E \cdot R = C \cdot c$$

i el guany mecànic:

$$i = \frac{C}{E} = \frac{R}{r}$$

Els volants dels vehicles és un sistema de roda i eix.

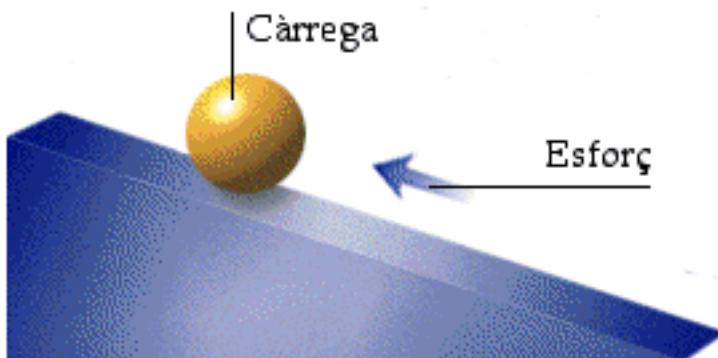
9.3.3. La politja



La politja és una roda acanalada que gira al voltant d'un eix. Pel canal hi passa una corda. En els extrems de la corda s'hi apliquen les forces.

El guany mecànic d'una única politja és la unitat, però té l'avantatge que permet canviar el sentit de les forces. D'aquesta manera, en el cas de què vulguem aixecar un massa de pes elevat podem utilitzar el nostre propi pes com a força.

9.3.4 El pla inclinat



El pla inclinat és una rampa amb un angle inferior a 90° . Permet elevar pesos amb un esforç menor. Sigui L la longitud de la rampa i H l'alçada de la rampa. Aleshores, el treball per elevar el cos haurà de ser el mateix, tant si l'elevem directament com si l'elevem a través de la rampa. Si anomenem E a l'esforç per

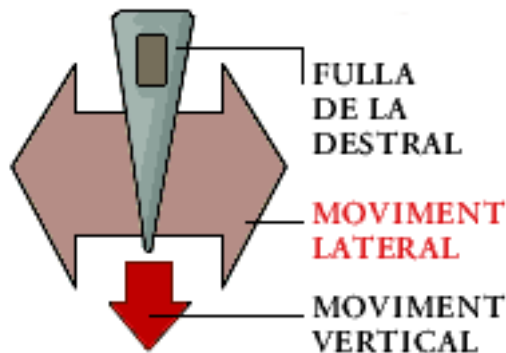
pujar-lo per la rampa i C a l'esforç per pujar-lo directament, s'haurà de verificar:

$$E \cdot L = C \cdot H$$

L'avantatge mecànic el podem escriure com:

$$i = \frac{C}{E} = \frac{L}{H} = \frac{1}{\sin \varphi}$$

9.3.5 El tascó



És un tipus de pla inclinat. Suposem que actua un esforç E sobre una falca amb un angle ϕ . En l'equilibri, la suma de les components normals C a les superfícies han de contrarestar E . Com que E és vertical s'haurà de verificar:

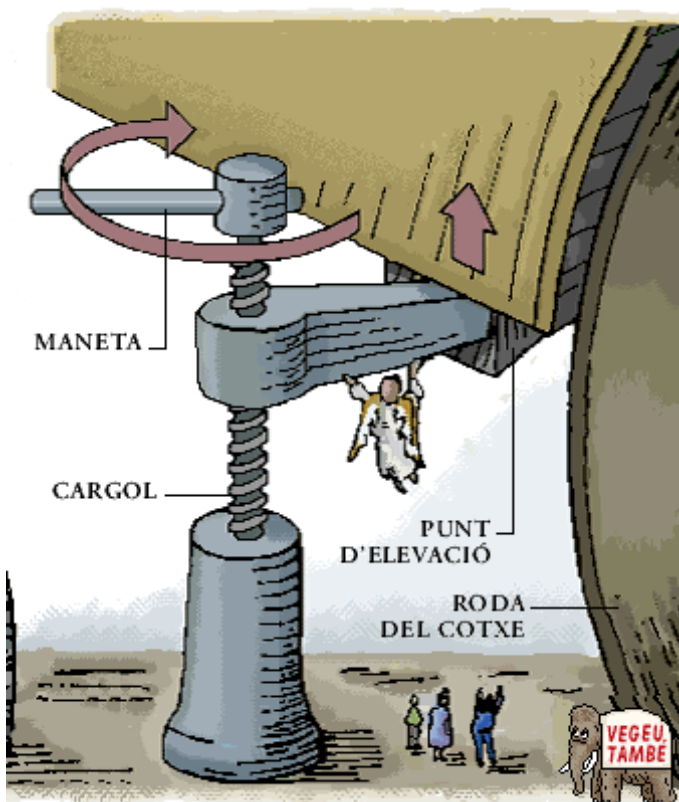
$$2C \cdot \sin \frac{\phi}{2} = E$$

L'avantatge mecànic vindrà donat per:

$$i = \frac{2C}{E} = \frac{1}{\sin \frac{\phi}{2}}$$

Com més esmolada és el tascó, més petit és ϕ i més gran és l'avantatge mecànic.

9.3.6 El cargol



El cargol és una de les màquines amb més avantatge mecànic que es pot fabricar. És també un cas particular de rampa, una rampa espiral. Un cargol és un filet helicoidal al voltant d'una tija cilíndrica. Quan un cargol gira, puja o baixa una distància molt petita anomenada pas de rosca (p), que és la distància entre dues espirals consecutives del filet del cargol. El cargol porta acoblat una maneta de radi $R \gg p$. El treball fet per l'esforç haurà de ser el mateix que el que fa la resistència; en particular, per un gir de la maneta:

$$E \cdot 2\pi R = C \cdot p$$

L'avantatge mecànic:

$$i = \frac{C}{E} = \frac{2\pi R}{p}$$

9.4 Màquines compostes

9.4.1 El polipast

El polipast és una combinació de politges que té un avantatge mecànic important. Consta d'una banda d'un conjunt de politges fixes i d'un conjunt de politges mòbils.

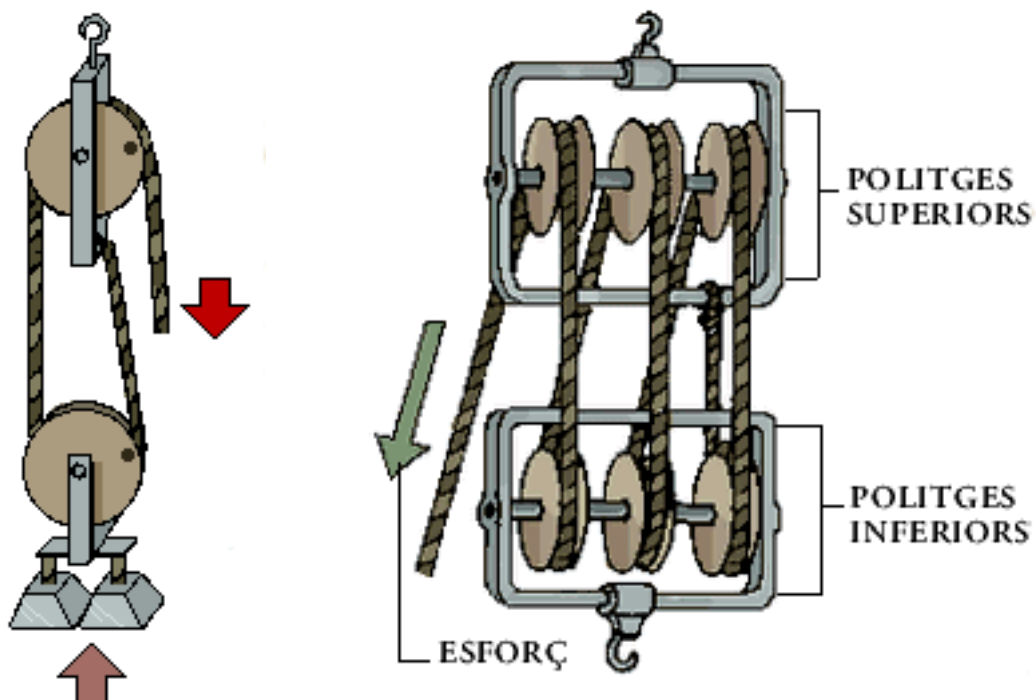
El polipast més senzill és el format per dues politges. Fixem-nos que la politja inferior subjecta la càrrega. La politja inferior està subjectada a cada banda per la corda, que haurà de tenir una tensió $C/2$. Per tant l'esforç que s'ha d'aplicar per equilibrar aquest polipast és $C/2$. L'avantatge mecànic serà per tant:

$$i = \frac{C}{C/2} = 2$$

Si és necessita un avantatge mecànic més gran, cal un nombre més gran de politges. Suposem que tenim n politges fixes i n politges mòbils. Fixem-nos que el pes de la càrrega queda repartit en n politges cadascuna de les quals està subjectada per dos extrems de la corda. Per tant la tensió de la corda és $C/2n$

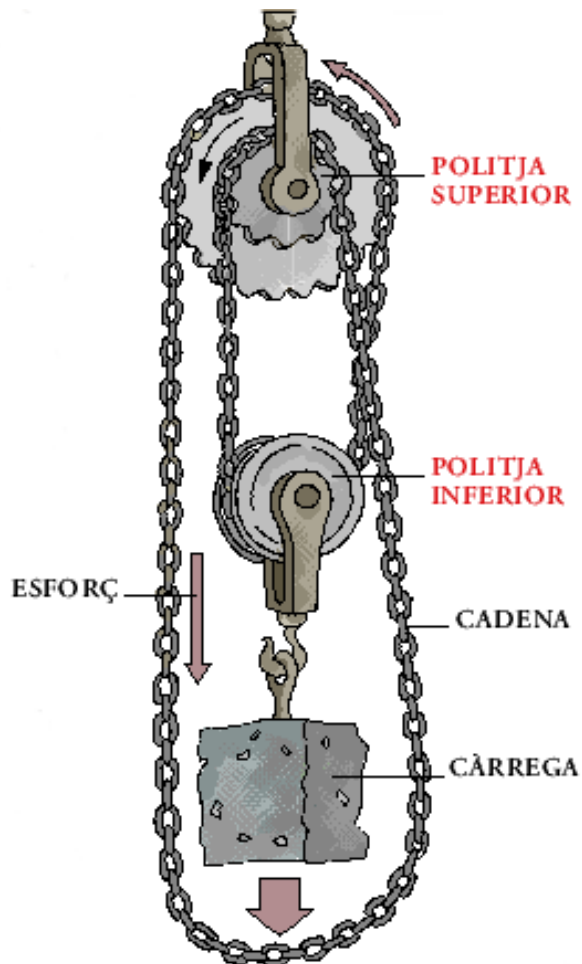
$$i = \frac{C}{C/2n} = 2n$$

Si $n=3$ com en el dibuix de la dreta, l'avantatge mecànic és 6. L'avantatge mecànic coincideix amb el nombre total de politges del polipast.



9.4.2. El Muntacàrregues

El muntacàrregues està constituït per una cadena sense fi i dues politges. La politja inferior només té una roda i aguanta la càrrega, mentre que la superior es compon de dues politges, una més gran que l'altra. La part de la cadena que estirem recorre una roda més gran que no pas la que aguanta la càrrega.



La tensió de la cadena, en condicions d'equilibri, haurà de ser la meitat del pes. La suma de moments haurà de ser nul. Anomenem R al radi de la politja gran i r al radi de la politja petita. Per tant:

$$E \cdot R + \frac{C}{2} \cdot r = \frac{C}{2} \cdot R$$

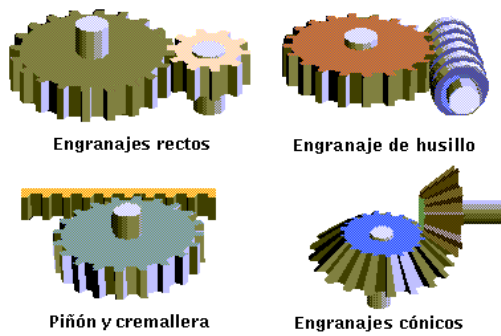
$$E \cdot R = \frac{C}{2} \cdot (R - r)$$

L'avantatge mecànic:

$$i = \frac{C}{E} = \frac{2R}{R - r}$$

Fixem-nos que és inversament proporcional a la diferència de radis, per la qual cosa resulta senzill obtenir grans avantatges mecànics i per tant es poden elevar grans pesos amb una màquina senzilla i robusta.

9.4.3 Engranatges



Els engranatges són rodes dentades. Dos engranatges poden acoblar-se entre si per contacte. Les dents dels engranatges asseguren que no hi hlliscament. Sigui r el radi de l'engranatge motor (a on s'aplica el moment M_E) i R l'engranatge conduït (on s'aplica la càrrega, el moment M_C). Sigui z_1 el nombre de dents de l'engranatge motriu i z_2 el nombre de dents de l'engranatge conduït. El nombre de dents és proporcional

al radi de l'engranatge. El treball fet per l'engranatge motor ha de ser el mateix que el que rep l'engranatge conduït. Per tant:

$$\Delta W = M_E \cdot \alpha_E = M_C \cdot \alpha_C$$

L'avantatge mecànic vindrà donat per:

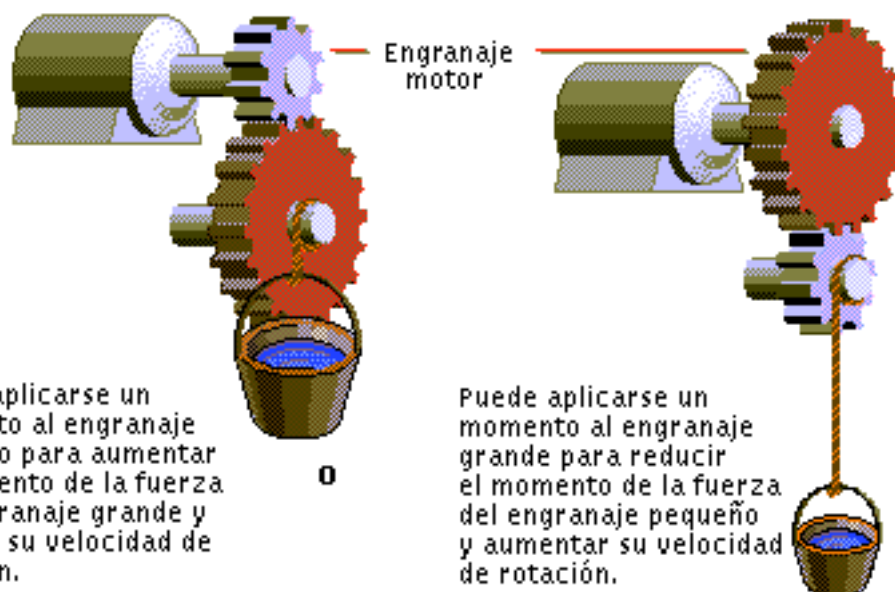
$$i = \frac{M_C}{M_E} = \frac{\alpha_E}{\alpha_C} = \frac{R}{r} = \frac{z_2}{z_1}$$

Fixem-nos que el cocient de les velocitats angulars de gir:

$$\Omega = \frac{\omega_C}{\omega_E} = \frac{r}{R} = \frac{z_1}{z_2}$$

Conclusions:

Engranajes de distinto tamaño

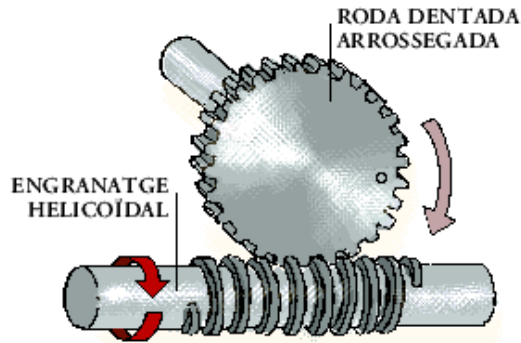


Puede aplicarse un momento al engranaje pequeño para aumentar el momento de la fuerza del engranaje grande y reducir su velocidad de rotación.

Puede aplicarse un momento al engranaje grande para reducir el momento de la fuerza del engranaje pequeño y aumentar su velocidad de rotación.

1. Si l'engranatge motor és més gran que el conduït $i > 1$ i $\Omega < 1$
2. Si l'engranatge motor és més petit que el conduït $i < 1$ i $\Omega > 1$

L'engranatge més petit, és sempre el que gira més ràpid i amb menys força; l'engranatge gran és sempre el que gira més lent i amb més força. Els engranatges són màquines que permeten canviar la velocitat al gir i la transmissió de forces.



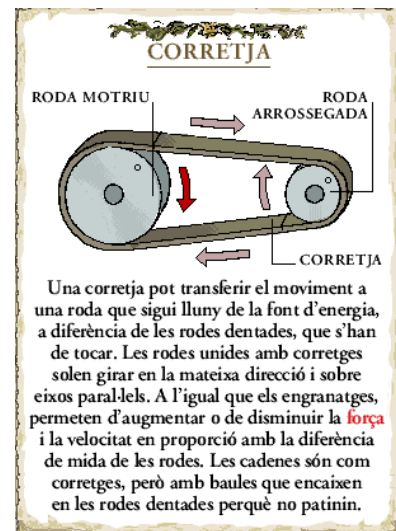
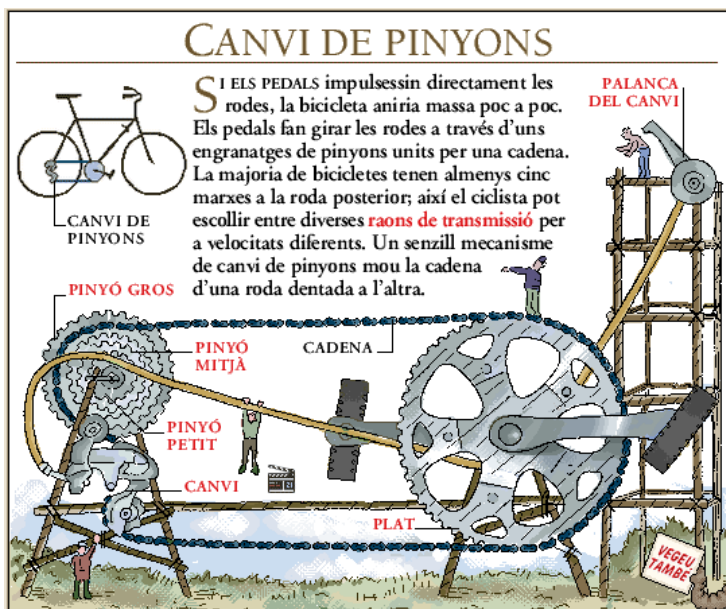
Hi ha un tipus particular d'engranatge anomenat vis sense fi. Consta d'un cargol i d'una roda dentada arrossegada pel cargol. Un gir complet del cargol suposa un gir molt petit de la roda arrossegada (l'equivalent a una dent). Per tant l'avantatge mecànic és molt gran:

$$M_E \cdot 2\pi = M_C \cdot \frac{\Delta z}{2\pi r} = \frac{M_C}{z_1}$$

$$i = \frac{M_C}{M_E} = 2\pi z_1$$

9.4.4. Politges i corretges. Transmissió per cadenes o corretges dentades

Tot el que hem vist fins ara pels engranatges, també és vàlid per qualsevol sistema de transmissió de moviment circular. L'única diferència és que mentre que en els engranatges es produeix una inversió en la velocitat de gir, en els altres sistemes aquesta inversió no es produeix.



9.5 Influència en el desenvolupament social

Les màquines permeten multiplicar i transmetre la força humana, la força animal o la produïda per qualsevol tipus de motor. Les màquines han permès fer a l'home allò que no podria directament per ell mateix. Com per exemple construir grans artilugis que permetin transportar càrregues d'un lloc a un altre.

L'ús de màquines ha tingut una influència directa en el desenvolupament social:

1. Ha permès la fabricació d'objectes d'ús quotidià immediat.
2. Ha permès obrir vies de comunicació i desenvolupar els mitjans de transport.
3. Ha permès el desenvolupament del comerç, al proporcionar objectes amb els que poder comerciar i permetre obrir noves rutes.
4. El comerç és una de les principals fonts de riquesa. Però no només és important per aquest fet, ja que a més implica l'intercanvi cultural, ja que cada vegada s'establiran rutes més i més llunyanes. A través del comerç viatgen també llibres i documents d'altres cultures.
5. Totes aquestes condicions es varen donar per primera vegada a l'antiga Grècia, bressol de la civilització occidental. La màxima esplendor cultural es va donar a la ciutat d'Alexandria, ciutat comercial per excel·lència, a on hi havia la famosa Biblioteca d'Alexandria, una de les set meravelles de l'antiguitat, i a on per primera vegada es va recollir de manera sistemàtica el saber de l'època. Qualsevol vaixell o mercader que entrés a la ciutat havia de donar els seus llibres a la Biblioteca per a que poguessin ser copiats.
6. L'ús de màquines ha suposat, doncs una influència important des del punt de vista cultural i per tant en la societat.
7. La tecnologia ha permès també, al llarg de la història, el domini d'altres pobles de tecnologies menys avançades que l'occidental, que han proporcionat ma d'obra barata (en molts casos esclaus) i recursos naturals. La tecnologia és també un factor important per l'estament militar, doncs en depèn la seva eficàcia. Avui en dia això és més cert que mai.
8. La tecnologia ha facilitat el desenvolupament de la ciència, al temps que els descobriments científics proporcionen la base per al desenvolupament de noves tecnologies. En particular podem destacar el sector sanitari, la indústria farmacèutica, etc.