TEMA 8

El problema de la possició de la Terra en l'Univers.

Sistemes geocèntric i heliocèntric.

Teoria de la gravitació universal.

Aplicacions.

Importància històrica de la unificació de la gravitació terrestre i celeste

8

El problema de la posició de la Terra en l'Univers. Sistemes geocèntric i heliocèntric. Teoria de la gravitació universal. Aplicacions. Importància històrica de la unificació de la gravitació terrestre i celeste.

8.1 Sistemes geocèntric i heliocèntric

1. Les primeres referències que es tenen: Sumeris, fa 5.000 anys. La Terra era plana, immòbil, i el centre de l'univers. El cel era una bòveda metàl·lica en la que els Deus mouen les estrelles el Sol, la Lluna i els cinc planetes.
2. D'altres civilitzacions, com la xina, la babilònia i l'egípcia també creien que la Terra era el centre de tot. El cel en moviment, inclosa la Via làctia eren el regne dels Deus i dimonis que provocaven el canvi de les estacions, el triomf i la derrota en les guerres i el curs de la vida a la Terra.
3. A partir del segle VI a. de J.C. una sèrie de Filòsofs grecs:
   Filolao de Tarent: Va suggerir per primera vegada que la Terra era esfèrica. La Terra és rodona perquè l'ombra sobre la Lluna és circular.
   Aristarco:Va deduir mitjançant observacions astronòmiques que el Sol estava molt més lluny que la Lluna, i que era molt més gran que la Terra. Aristarco va acabar pensant que era el Sol el que estava al centre del sistema Solar i que els estels estaven fixos i que eren sols que estaven molt més lluny que el nostre sol. La Terra era un planeta més i girava sobre ella mateixa.
   Eratóstones de Cirene: El primer en mesurar la grandària de la Terra.
   Hiparco: calcula la distància Terra-Lluna.
   Ptolomeo: La Terra és el centre de l'univers. Les orbites del Sol i dels planetes són circulars. A més, els planetes giren sobre uns cercles anomenats epicicles. És el que té més influència sobre èpoques posteriors, sobretot perquè l'església catòlica l'adopta com a dogma.
4. Renaixement:
   Copèrnic: Recupera les opinions d'Aristarc. Escriu De Revolutionibus, que es converteix en el millor compendi d'Astronomia de l'època. Defèn la idea de que els plantes giren al voltant del Sol en òrbites circulars.
   Kepler: Gràcies a les observacions de Tycho Brahe, estableix les anomenades Lleis de Kepler, que descriuen el moviment dels planetes. És la primera vegada que el model heliocèntric s'estableix en tot rigor sobre observacions astronòmiques de gran qualitat.
   Galileo: Descobreix que Júpiter té satèl·lit que giren al seu voltant. Observa també per primer cop el relleu de la Lluna. Observa les fases de Venus, incompatibles amb les idees de Ptolomeo. És un defensor del model Heliocèntric.
5. Newton: Estableix les lleis bàsiques del moviment. Descobreix la llei de la gravitació Universal, mitjançant la qual es possible predir les lleis de Kepler i el moviment de qualsevol objecte sota l'acció de qualsevol força, en particular la gravitatòria. Les lleis Físiques són Universals.
6. Gràcies a les lleis de Newton va ser possible trobar un altre planeta, Neptú, i intuir l'existència d'un altre planeta, Plutó.
7. A llarg del segle XX es descobreix que formem part d'una galàxia entre moltes d'altres, i que ens trobem més aviat a la perifèria, en cap lloc privilegiat.

8.2 Expressió de la força gravitatòria. Potencial gravitatori

8.2.1 Força Gravitatòria

La força gravitatòria que una massa m_1 exerceix sobre una massa m_2 separades pel vector $\mathbf{r}_{12}$ ve donada per:

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\mathbf{e}_{12}$$

on $\mathbf{e}_{12}$ és un vector unitari en la mateixa direcció i sentit que $\mathbf{r}_{12}$. G s'anomena constant de gravitació universal i val G = $6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2/kg^2$. Per la pròpia definició, la força que m_2 exerceix sobre la massa m_1 té el mateix mòdul però direcció oposada.

El fet que el valor de m_1 i m_2 coincideixi amb els valors de les masses inercials no és un fet trivial, i s'anomena principi d'equivalència. Newton en va demostrar l'equivalència estudiant el periode de pèndols de diferents masses i composicions.

8.2.2 Camp Gravitatori

La força gravitatoria és una força que s'exerceix a distància. Una massa m_1 fa força sobre una massa m_2 estigui on estigui. Diem aleshores que la massa m_1 modifica d'alguna manera l'espai al seu voltant, diem que hi crea un camp de forces. Un camp de forces queda determinat amb una funció vectorial que assigna a cada punt un vector amb mòdul la intensitat de la força per unitat de massa i direcció i sentit cap a la massa m_1. El camp gravitatori **g** creat per una massa puntual m_1 situada en el punt 1 en un punt de l'espai qualsevol 0 és pot escriure com:

$$\mathbf{g} = -G\frac{m_1}{r_{10}^2}\mathbf{e}_{10}$$

Si hi ha més d'una massa, el camp graviatori en un punt qualsevol de l'espai es pot escriure com:

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{N} -G\frac{m_i}{r_{i0}^2}\mathbf{e}_{i0}$$

Si tenim una distribució continua de massa:

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{N} \int_M -G\frac{dm}{r^2}\mathbf{e}$$

on r és la distància de dm fins al punt 0.

8.2.3 Potencial gravitatori

Suposem que tenim una massa m_1 en l'origen de coordenades. El treball necessari per portar una particula m_2 des d'un punt $\mathbf{r}_1$ fins a un punt $\mathbf{r}_2$ es pot escriure com:

$$W(1 \to 2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Gm_1m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Gm_1m_2}{r}\Bigg]_{r_1}^{r_2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_2} + \frac{Gm_1m_2}{r_1}$$

on hem tingut en compte que la força graviatòria és un camp central de forces i que només contribueixen a la integral els desplaçaments radials. Fixem-nos que obtenim la resta de dos funcions que depenen únicament de les coordenades del punt inicial i final. Sembla com si a cada punt li poguessim assignar una funció anomenada energia potencial:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Si triem 1 a l'infinit a l'integral anterior queda clar aleshores el significat de U(r). Fixem-nos que U(r) no és més que el treball necessari per portar una massa des de l'infinit fins a r.

Es defineix també el potencial gravitatori com l'energia potencial per unitat de massa:

$$V(r) = -\frac{Gm_1}{r}$$

8.2.4 Conservació de l'energia

Quan sobre una massa m hi actua una força gravitatoria es produeix una variació d'energia cinètica i d'energia potencial:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} m\mathbf{v}d\mathbf{v} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1 \\ &\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(r_1) - U(r_2) \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1 = U(r_1) - U(r_2)$$

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1 + U(r_1) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2 + U(r_2)$$

8.2.5 Aplicacions

Una aplicació interessant és el càlcul de la velocitat mínima necessària per abandonar la superficie d'un planeta, anomenada velocitat d'escapament.

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

A la Terra aquesta velocitat és de 11,2Km/s, a la Lluna de 2,4 Km/s.

8.3 Les trajectòries són còniques

Anem a deduir quines trajectòries poden tenir els objectes sotmesos a la força gravitatòria. Veurem que les úniques trajectòries possibles són una família de corbes anomenades còniques. Quina cònica en concret dependrà de l'energia de l'objecte en consideració

8.3.1. Descripció del moviment en coordenades polars

En coordenades polars definim:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$
$$\mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}$$
$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}$$

El vector possició s'escriu:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

El vector velocitat:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\cdot\dot{\theta}$$
$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

El vector acceleració:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r$$
$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta$$

8.3.2 Conservació del moment angular

El moment angular i la seva variació en el temps es pot escriure com:

$$\mathbf{L} = m\left(\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right) = mrv_\theta\left(\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\theta\right) = mr\cdot r\dot{\theta}\cdot\mathbf{e}_z$$
$$\mathbf{L} = mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z$$
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m\left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}\right)\mathbf{e}_z$$

8.3.3. Segona Llei de Newton

Si escribim la segona llei de Newton, obtenim:

$$F(r) = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$
$$0 = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)$$

L'última equació, si la multipliquem per r, expressa la conservació del moment angular:

$$\mathbf{L} = mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z = cte$$
$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

Substituint a la primera equació:

$$F(r) = m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}$$

8.3.4 Energia

La segona llei de Newton es pot reesecriure com:

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}$$

Substituint F(r):

$$m\ddot{r} = \frac{K}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}$$

Això es pot reesecriure com:

$$m\ddot{r} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{K}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)$$

Si multipliquem per $\dot{r}$:

$$m\dot{r}\ddot{r} = \dot{r}\frac{d}{dr}\left(-\frac{K}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{K}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)$$
$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

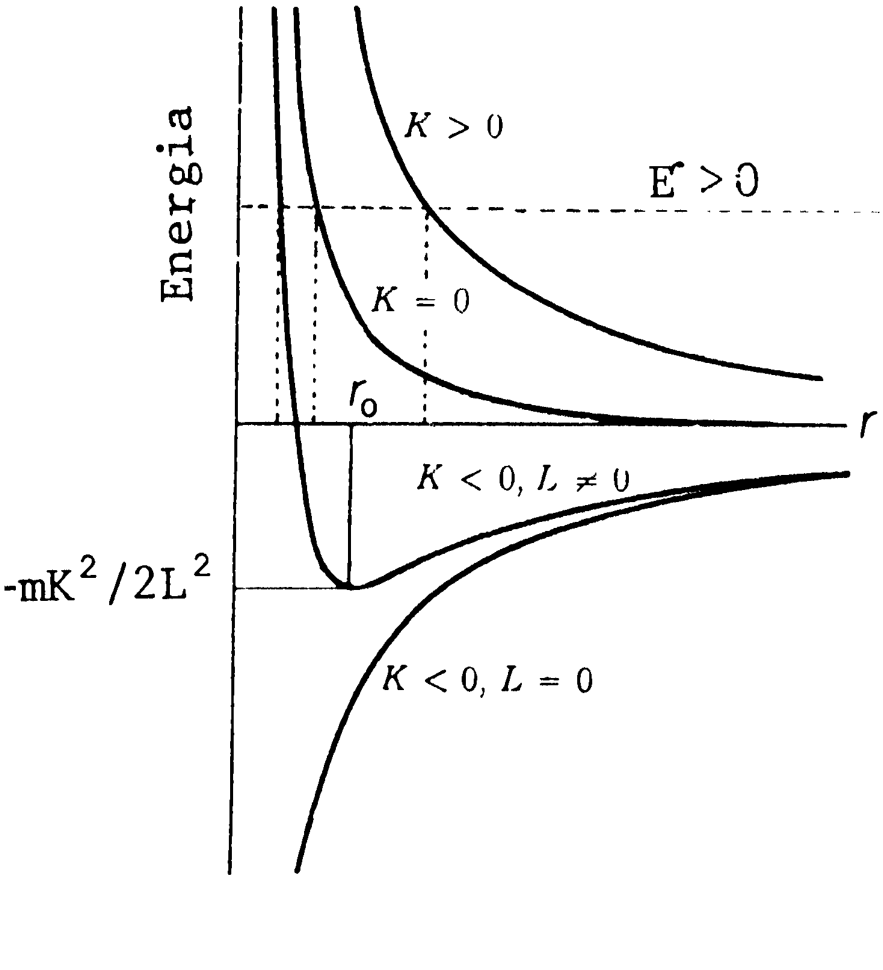
L'energia es conserva. Per tant ara sabem que:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$
$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$
$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_e)}$$

on V_e és l'anomenat potencial efectiu:

$$V_e = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

És interessant estudiar V_e per diferents valors de L:



Només per L>0 i E<0 r estarà delimitat entre dos valors, és adir, l'òrbita serà tancada.

8.3.5 Equació de la trajectòria

Aquesta és l'equació del moviment. Per trobar l'equació de la trajectòria, fem el canvi r=1/u. Aleshores:

$$\dot{r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta}=-\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r}=-\frac{L}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)=-\frac{L}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta}=-\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Substituint obtenim:

$$\ddot{r}=-\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$-\frac{L^2}{m}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{L^2}{m}u^3=F(r)$$

$$-\frac{L^2}{mr^2}\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right\}=F(r)$$

Newton va descobrir que:

$$F(r)=\frac{K}{r^2}$$

Substituint:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=-\frac{mK}{L^2}$$

Fem el canvi:

$$w=\frac{1}{r}+\frac{mK}{L^2}$$

L'equació diferencial queda aleshores com:

$$\frac{d^2w}{d\theta^2}+w=0$$

i la solució és immediata:

$$w=A\cos\left(\theta-\theta_0\right)$$

Recordant la definició de w:

$$\frac{1}{r}+\frac{mK}{L^2}=A\cos\left(\theta-\theta_0\right)$$

Finalment podem escriure r en funció de l'angle:

$$r = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)} \qquad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{L^2}{mK} \\ \varepsilon = -\dfrac{L^2}{mK}A \end{cases}$$

La trajectòria és una cònica amb un focus a l'origen i ε n'és l'excentricitat. Per ε=0 és una circumferència, per 0<ε<1 és una elipse, per ε=1 és una paràbola, i per ε>1 és una hipèrbola.

Ens falta per determinar A. En l'equació anterior tenim que el valor mínim de r és:

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{1+\varepsilon}$$

Per aquest valor, l'energia cinètica radial ha de ser nula. L'energia total es pot escriure com:

$$E = \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} + \frac{K}{r_{\min}}$$

Substituint trobem que:

$$E = \frac{1}{2}\frac{mK^2}{L^2}(1+\varepsilon)^2 - \frac{mK^2}{L^2}(1+\varepsilon)$$

$$E = \frac{mK^2}{2L^2}(\varepsilon^2 - 1)$$

Finalment:

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{mK^2}$$

Depenent dels valors de l'energia tindrem un tipus d'òrbita o un altre.

8.3.6 Órbites Elíptiques

Un cas particular important per estudiar són les òrbites elíptiques, que són les dels planetes. Anem a calcular els semieixos i l'àrea de l'òrbita. A partir dels valors màxims i mínims de r podem calcular el semieix major:

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \qquad r_{\max} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon} \qquad a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad b^2 = a^2 - c^2 = a^2\left(1-\varepsilon^2\right) \qquad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = a^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}$$

$$a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} \qquad b = \sqrt{a\alpha}$$

L'àrea de l'òrbita es pot escriure com:

$$S = \pi ab = \pi a^{3/2}\alpha^{1/2}$$

8.4. Aplicacions Lleis de Kepler

1. Les òrbites dels palnetes són elipses, amb el Sol situat en un dels focus. Aquesta llei ja l'hem vista. Hem vist a més que hi ha altres possibilitats. Totes les còniques són possibles òrbites depenent de l'energia.

2. Els planetes escombren àrees iguals en temps iguals:

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r^2\frac{L}{mr^2} = \frac{L}{2m}$$

3. El quadrat del periode orbital és proporcional al cub del semieix major.

$$T^2 = \left(\frac{\pi ab}{L/2m}\right)^2 = \left(\frac{2m}{L}\right)^2 \pi^2 a^3 \alpha = \frac{4m\pi^2 a^3}{K}$$

$$T^2 = \frac{4m\pi^2}{K}a^3$$