TEMA 7

Dinàmica d'un sistema de partícules.

Moment lineal i Moment angular.

Principis de Conservació.

Energia d'un sistema de partícules.

Relació Treball-Energia

7

Dinàmica d'un sistema de partícules. Moment lineal i Moment angular. Principis de Conservació. Energia d'un sistema de partícules. Relació Treball-Energia.

7.1 Dinàmica d'un sistema de partícules

La dinàmica de la partícula descriu el moviment d'un objecte que pot ser tractat com una partícula o massa puntual. En molts casos pràctics els objectes amb els quals hem de tractar poden considerar-se com una col·lecció o sistema de partícules. Aquests sistemes són anomenats discrets o continus segons si les partícules poden considerar-se separades o no. En molts casos pràctics un sistema discret amb un gran nombre de partícules es podrà tractar com un sistema continu. Inversament, un sistema continu pot tractar-se com un sistema discret amb un gran nombre, però finit, de partícules.

7.1.1 Centre de masses

Siguin $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N$ els vectors de posició d'un sistema de N partícules de masses m_1, $m_2,\ldots,m_N$ respectivament. El centre de massa és defineix com el punt C que té per vector de posició:

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i r_i$$

on $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ és la massa total del sistema. Per sistemes continus de partícules que ocupen una regió $\mathcal{R}$ de l'espai en el qual la densitat és ρ, el centre de masses pot expressar-se com:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int_R \rho\mathbf{r}dV}{\int_R \rho dV} = (x_C, y_C, z_C)$$

$$M = \int_R \rho dV \quad x_C = \frac{\int_R \rho x dV}{M} \quad y_C = \frac{\int_R \rho y dV}{M} \quad z_C = \frac{\int_R \rho z dV}{M}$$

En la pràctica, per passar de sistemes discrets a continus és correcte canviar sumatoris per integrals. Tot el que farem a continuació, doncs, ho escriurem per sistemes discrets.

7.1.2. Moment d'un sistema de partícules

El moment total d'un sistema de partícules es defineix com:

$$\mathbf{p}=\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i=\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i=M\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i\right)=M\dot{\mathbf{r}}_C$$

i veiem que es pot escriure com la massa total per la velocitat del centre de masses.

7.1.3 Moviment del centre de masses

Sigui $\mathbf{F}_i$ la força externa resultant sobre la partícula i, i sigui $\mathbf{F}_{ij}$ la força interna deguda a la partícula j. La segona llei de Newton aplicada a la partícula i ens dóna que:

$$\mathbf{F}_i+\sum_{j=1}^{N}\mathbf{F}_{ij}=\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}=\frac{d^2}{dt^2}(m_i\mathbf{r}_i)$$

Si fem la suma per totes les partícules:

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{F}_{ij}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i\right)$$

La tercera llei de Newton diu que $\mathbf{F}_{ij}$=-$\mathbf{F}_{ji}$ per tant el doble sumatori esdevé zero. Definint **F** com la suma de les forces externes i recordant la definició de centre de masses:

$$\mathbf{F}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i \qquad \mathbf{r}_C=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i$$

arribem a que:

$$\mathbf{F}=M\frac{d^2\mathbf{r}_C}{dt^2}$$

Això vol dir que el centre de masses es mou com si hi actués la resultant de totes les forces externes que actuen sobre cada partícula, i en ell hi estés concentrada tota la massa del sistema.

7.1.4. Conservació del moment

Si **F**=0 aleshores:

$$\mathbf{p}=\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i=\text{constant}$$

Per tant si la suma de forces externes és nula, aleshores, el moment total roman constant, és a dir, es conserva. En aquestes condicions, el centre de masses és mou a velocitat constant o roman en repòs.

7.2. Moment angular. Moment extern total. Conservació del moment

7.2.1 Relació entre el Moment angular i el Moment extern total

Es defineix el moment angular d'un sistema de partícules respecte l'origen O d'un sistema de coordenades com:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

El moment del sistema produït per forces externes es definirà anàlogament com:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

Sabem que $\mathbf{F}_i$ verifica:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\left(m_i \mathbf{r}_i\right)$$

Fent el producte vectorial:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{d\left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i\right)}{dt}$$

on hem utilitzat que la derivada de r_i està en la mateixa direcció que el moment. Si sumem per totes les partícules:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i\right)$$

En el doble sumatori, per cada terme ij existeix un terme ji. Si escrivim una parella de termes i utilitzem la tercera llei de Newton, podem escriure:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right) \times \mathbf{F}_{ij}$$

Si suposem que les forces d'interacció entre les partícules són forces centrals, les parelles de termes s'anul·len. Aleshores arribem a:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i\right)$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Per tant, si les forces d'interacció entre les partícules són forces centrals, aleshores la variació del moment angular del sistema respecte del temps és igual al moment total produït per les forces externes.

7.2.2. Conservació del moment angular

Si **M**=0 aleshores:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \text{constant}$$

Si el moment extern resultant és zero el moment angular total roman constant, és a dir, es conserva.

7.3 Relació Treball-Energia

7.3.1. Energia Cinètica i treball

L'energia cinètica d'un sistema de partícules es defineix com:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

La unitat de mesura és el Joule. Si $\mathbf{F}_i$ és la força total (externes + internes) que actua sobre la partícula i, aleshores el treball realitzat per a passar el sistema des d'un estat 1 fins a un estat 2 és:

$$W_{12} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i$$

Anem a veure que aquest treball correspon a la variació d'energia cinètica. La segona llei de Newton aplicada a la partícula i es pot escriure com:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} = \frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i)$$

Multiplicant a dues bandes per la velocitat:

$$\mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i\right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$
$$\mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\right)$$

Si sumem per tot i, i a més integrem des de $t=t_1$ fins a $t=t_2$ trobarem que:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\right)$$
$$\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\right) dt$$

Utilitzant que $\dot{\mathbf{r}}dt = d\mathbf{r}$ i els símbols 1 i 2 per denotar les possicions del sistema en els temps t_1 i t_2:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i dt = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\right) dt$$
$$W_{12} = \sum_{i=1}^{N} \int_{1}^{2} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i = T_2 - T_1$$

El treball i l'energia cinètica es mesuraran en les mateixes unitats, el Joule.

7.3.2. Energia Potencial. Conservació de l'energia

Diem que una força **F** és conservativa quan es pot escriure com el gradient d'una funció que anomenem energia potencial. Això ens assegura que el treball que hem de fer (fent una força $\mathbf{F}_n$) quan portem una partícula des d'una possició 1 fins a una possició 2 contra la força **F** és:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \mathbf{F}_n d\mathbf{r}_i = -\int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}_i = \int_1^2 \nabla V d\mathbf{r}_i = V_2 - V_1$$

és la diferència dels valors de la funció energia potencial en els punts inicial i final. Fixem-nos doncs que V és una energia lligada a la possició de la partícula. De la definicó veiem que tant el treball com l'energia potencial tindràn les mateixes unitats, el Joule.

Si les forces que actuen sobre les partícules, tant les externes com les internes són conservatives, aleshores es poden escriure com a gradients de funcions energia potencial:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i \cdot V_{ij} \qquad \mathbf{F}_i = -\nabla_i \cdot V_i$$

Utilitzant aquestes expressions i fixant-nos en què V_{ij} és una funció de 6 variables, és a dir, $\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \nabla_j V_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j = dV_{ij}$ arribem a:

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\nabla_i V_i \cdot d\mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i = T_2 - T_1$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\left(V_i^{(2)} - V_i^{(1)}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left(V_{ij}^{(2)} - V_{ij}^{(1)}\right) = T_2 - T_1$$

Si definim:

$$V_1 = \sum_{i=1}^{N} V_i^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left(V_{ij}^{(1)}\right) \qquad V_2 = \sum_{i=1}^{N} V_i^{(2)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left(V_{ij}^{(2)}\right)$$

on V_1 i V_2 són les energies potencials totals del sistema en la situació 1 i 2 respectivament. Substituint:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = E$$

on E s'anomena energia total del sistema i veiem que és una quantitat que roman constant en qualsevol canvi del sistema. Per tant en general escrivim:

$$E = T + V$$

Aquesta expressió vol dir que l'energia deguda al moviment de la partícula (energia cinètica) més l'energia deguda a la possició de la partícula en un camp de forces (energia potencial es manté constant. Per tant si una augmenta l'altra haurà de disminuir i a l'inversa. Aquesta igualtat rep el nom de teorema de la conservació de l'energia mecànica.

7.4 Moviment relatiu al centre de massa

7.4.1 El moment lineal respecte del centre de masses és nul

Les coordenades del centre de masses són:

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$

Si prenem com a nou sistema d'eixos coordenats un sistema amb origen a C, aleshores:

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i' = 0$$

Si derivem respecte del temps:

$$\mathbf{p}' = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i' = 0$$

Per tant respecte del centre de masses el moment lineal és zero.

7.4.2 El moment angular total és igual al moment angular respecte el centre de massa més el moment angular del propi centre de masses.

La relació entre el vector de posició $\mathbf{r}_i$ d'una partícula respecte d'un sistema de referència i la posició $\mathbf{r}_i'$ respecte del centre de masses ve donada per:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i'$$

Si derivem respecte del temps:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_i'$$

Utilitzant aquestes igualtats en l'expressió del moment angular:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i') \times (m_i \mathbf{v}_C + \mathbf{p}_i') =$$

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i' + \mathbf{r}_C \times \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i' + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_C$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{p}_C + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i'$$

Per tant el moment angular es pot escriure com el moment angular del centre de masses més el moment angular respecte del centre de masses.

7.4.3 L'energia cinètica total descomposa com a suma de l'energia cinètica respecte del centre de masses més l'energia cinètica del centre de masses.

Anàlogament, utilitzant les expressions anteriors i substituint:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_i')^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i'^2 + \mathbf{v}_C \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i'$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i'^2$$

per tant l'energia cinètica es pot escriure com l'energia cinètica del centre de masses més l'energia cinètica respecte del centre de masses.

7.4.4 El moment extern total amb respecte al centre de masses és igual a la variació en el temps del moment angular respecte del centre de masses.

La demostració és anàloga a la de l'apartat 7.1.5.

7.5. Xocs

Una aplicació important de la conservació del moment i de l'energia és la descripció dels xocs. Anem a suposar xocs en una dimensió.

Suposem que dues masses m_1 i m_2 que es mouen sobre la mateixa recta xoquen. Anem a determinar les velocitats després del xoc v_1' i v_2' en funció de les velocitats inicials v_1 i v_2.

El moment abans del xoc serà:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Per analitzar que passa durant el xoc és molt convenient situar-se sobre un sistema inercial en el que p=0, és a dir, sobre el centre de masses. Suposem que ens situem sobre un sistema que es mou a una velocitat:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

respecte a aquest nou sistema de referència les velocitats de les dues masses es poden escriure:

$$u_1 = v_1 - V = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$
$$u_2 = v_2 - V = v_2 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

Es comprova fàcilment que respecte d'aquest sistema de referència el moment és nul:

$$p_V = m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$$

En el moment del xoc, si el moment s'ha de conservar, passi el que passi, fixem-nos que l'única possibilitat és que:

$$u_1' = -\varepsilon u_1$$
$$u_2' = -\varepsilon u_2$$

on ε és l'anomenat coeficient de restitució. Es pot avaluar experimentalment i pren valors entre 0 i 1. La conservació de l'energia ens diu que el màxim valor de ε és 1. El mínim és zero per què l'energia cinètica es pot transformar en d'altres tipus d'energia. Si ε=1 diem que el xoc és elàstic (les masses conserven les seves velocitats) i si ε=0 diem que el xoc és totalment inelàstic (les masses queden unides i en repòs).

Si tornem al sistema de referència inicial trobarem les velocitats:

$$v_1' = u_1' + V = -\varepsilon u_1 + V = -\varepsilon(v_1 - V) + V = -\varepsilon v_1 + (1+\varepsilon)V$$
$$v_2' = u_2' + V = -\varepsilon u_2 + V = -\varepsilon(v_2 - V) + V = -\varepsilon v_2 + (1+\varepsilon)V$$

Substituint el valor de V trobem que:

$$v_1' = V + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\varepsilon(v_2 - v_1) \qquad v_2' = V + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\varepsilon(v_1 - v_2)$$

Per un xoc totalment inelàstic ε=0 tindrem:

$$v_1' = v_2' = V$$

Per un xoc elàstic ε=1:

$$v_1' = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \qquad v_2' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

Aquí podem considerar uns quants casos particulars:

iv) Si $m_1 = m_2$ i $v_2 = 0$ aleshores:

$$v_1' = 0 \qquad v_2' = v_1$$

és a dir, si dues masses iguals xoquen, i una és estacionària, aleshores s'intercanvien els moments.

v) Si $m_1 << m_2$ i $v_2 = 0$ aleshores:

$$v_1' = -v_1 \qquad v_2' = 0$$

és a dir, que si una partícula de massa petita impacta contra una massa molt gran, la partícula "rebota".

vi) Si $m_1 = m_2$:

$$v_1' = v_2 \qquad v_2' = v_1$$

Si les masses són iguals les partícules simplement intercanvien les seves velocitats.