TEMA 6

Moviment de Rotació d'una partícula.

Cinemàtica i Dinàmica.

Conservació del moment angular.

Aplicació al moviment dels astres.

6

Moviment de Rotació d'una partícula. Cinemàtica i Dinàmica. Conservació del moment angular. Aplicació al moviment dels astres.

6.1 Moviment de Rotació d'una partícula

6.1.1 Cinemàtica

Es diu que una partícula té un moviment de rotació quan descriu una trajectòria circular centrada sobre l'eix i continguda en un pla normal a l'eix. Agafem un sistema de coordenades de tal manera que l'origen O estigui contingut en l'eix de rotació que suposarem fix.

La velocitat **v** d'un punt P del sòlid serà tangent a la circumferència. Per tant escriurem:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t$$

El mòdul de la velocitat és la rapidesa:

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho\frac{d\theta}{dt}$$

on ρ és la distància de P a l'eix de rotació i hem utilitzat que $ds = \rho d\theta$ amb l'angle en radians. La variació de l'angle respecte del temps rep el nom de velocitat angular ω. Podem escriure aleshores:

$$v = \omega\rho$$

La unitat de velocitat angular és el rad/s. Definirem ara el vector velocitat angular. El vector velocitat angular $\boldsymbol{\omega}$ tindrà com a mòdul ω i com a direcció la de l'eix de rotació. El sentit vindrà donat per la regla de la mà dreta. Escriurem:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}$$

on **e** és un vector unitari en la direcció de l'eix.

Anem a relacionar **r** (el vector posició de P), la velocitat **v** i $\boldsymbol{\omega}$. Fixem-nos que **v** és perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ i a **r**. Primer buscarem una relació entre els vectors unitaris. Escrivim:

$$\sin\varphi.\mathbf{e}_t = \left(\mathbf{e}\times\mathbf{e}_r\right)$$

on φ és l'angle format pels vectors **r** i $\boldsymbol{\omega}$. Multiplicant per ωr a dues bandes obtenim:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

donat que $v = \omega\rho = \omega r \sin\varphi$.

Si derivem respecte del temps i suposem que l'eix de rotació no canvia en el temps trobarem l'acceleració:

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$$
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

on $\boldsymbol{\alpha}$, l'acceleració angular ve donada per:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\mathbf{e}$$

La unitat d'acceleració angular és rad/s^2. L'acceleració descomposa com la suma de dos termes, un tangent a la trajectòria a_t i l'altre normal a la trajectòria, anomenada acceleració centrípeta a_n:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_t} + \mathbf{a_n}$$
$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

6.1.2 Forces necessàries per produir un moviment circular

De l'expressió anterior en treiem unes quantes conclusions. La primera, quina força caldrà fer per mantenir una partícula en rotació. Apliquem la segona llei de Newton:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n$$
$$\mathbf{F}_t = m\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}$$
$$\mathbf{F}_n = m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

i) Si volem mantenir un moviment de rotació amb $\boldsymbol{\omega}$=cte necessitem una força normal a la trajectòria de la partícula, força que s'anomena força centrípeta. El mòdul d'aquesta força serà:

$$F_n = m\omega^2\rho = m\frac{v^2}{\rho}$$

ii) Si l'acceleració angular és nula, és, perquè, a més a més, hi ha una força tangencial aplicada sobre la partícula:

$$F_t = m\alpha\rho = ma_t$$

6.1.3 Equacions del moviment circular uniformement accelerat

Si les forces, tant la centrípeta com la tangencial són constants, resulta senzill trobar les equacions del moviment. Si coneixem la velocitat angular o l'acceleració en funció del temps o de l'angle θ és possible trobar les equacions del moviment. Pel cas particular en què $\alpha=\alpha_0$=cte, podem integrar i trobar fàcilment les equacions del moviment. Com que l'acceleració és constant, podem escriure:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha \int_{t_0}^{t} dt$$

Integrant trobarem la relació entre ω i α:

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

Utilitzant que ω=dθ/dt podem escriure:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt + \int_{t_0}^{t} \alpha(t - t_0) dt$$

Integrant trobarem α en funció del temps:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Si aïllem el temps en l'equació que relaciona ω amb t i substituïm a l'última equació:

$$(t - t_0) = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{\omega\omega_0 - \omega_0^2}{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2 - 2\omega\omega_0 + \omega_0^2}{\alpha}$$

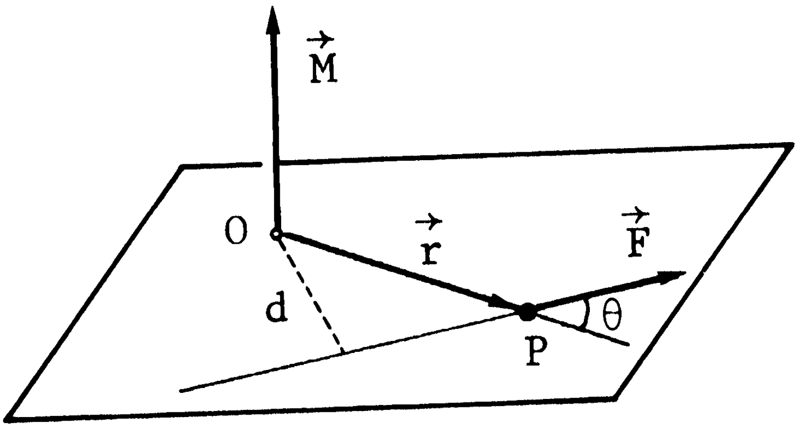
$$\alpha(\theta - \theta_0) = \frac{1}{2}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

trobem finalment l'equació que relaciona la velocitat angular amb l'angle recorregut.

6.2 Moment d'una força. Moment angular

Considerem una força **F** que actua sobre una partícula localitzada en un punt P de l'espai i un sistema de referència amb origen a un punt O. Es defineix el moment **M** corresponent a la força **F** respecte del punt O com el producte vectorial del vector posició de la partícula **r** = OP pel vector **F**:



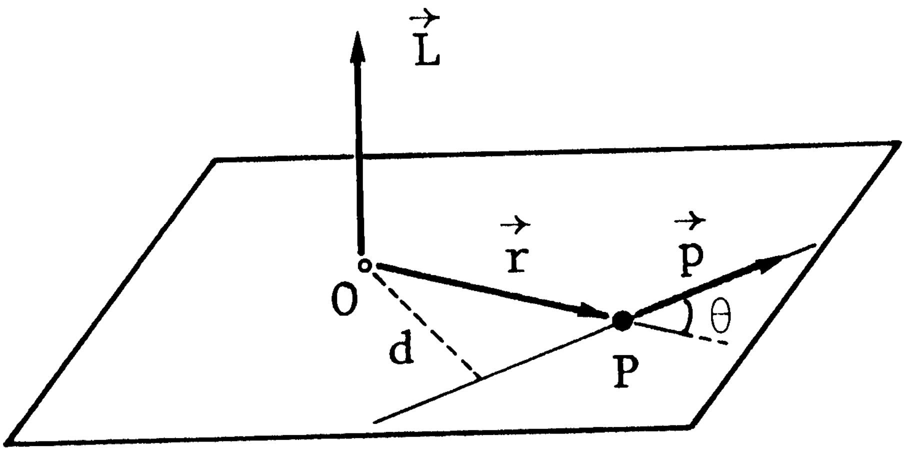
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Això vol dir que el moment **M** és perpendicular al pla que conté **r** i **F** i el seu sentit es determina segons la regla del cargol. El mòdul vindrà donat per:

$$|\mathbf{M}| = rF\sin\theta = Fd$$

on d és la distància de la recta definida per F al punt O i s'anomena braç de la força respecte del punt O. Les unitats de moment són N.m.

El moment angular o cinètic **L** respecte del punt O d'una partícula de massa m i la velocitat **v** (i per tant amb un moment **p**=m**v**) es defineix com:

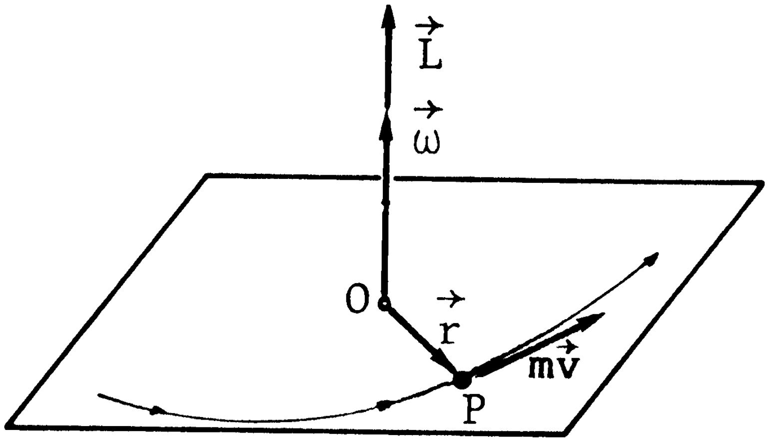


$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

El mòdul del moment angular es pot escriure com:

$$|\mathbf{L}| = rp\sin\theta = pd$$

on d és el braç del moment angular. La unitat de moment angular és el kg.m^2/s.



En el cas particular d'un moviment de rotació, la trajectòria està continguda en un pla. Si situem el sistema de referència amb origen sobre el pla de l'òrbita, **ω**x**r**=0, podem escriure:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$
$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$$
$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$
$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - m(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$$
$$\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega}$$

En aquest cas particular **L** té la mateixa direcció que **ω**.

Anem a veure ara com varia **L** en el temps:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$$
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p} + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}$$
$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Acabem de deduir, doncs que la variació temporal del moment angular d'una partícula és igual al moment de la força que actua sobre aquesta partícula.

6.3 Impulsió. Conservació del moment angular

Si en l'expressió anterior considerem el canvi de moment angular que es produirà en un dt podrem escriure:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$$

El canvi total de moment angular en un cert Δt serà:

$$\Delta\mathbf{L} = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{M}dt \equiv \mathbf{M}$$

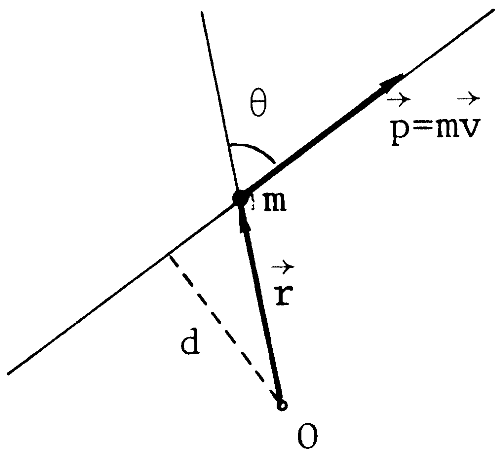
on $\mathcal{M}$ és coneix amb el nom d'impulsió angular. Per tant la variació del moment angular ve donada per la impulsió del moment de la força.

Si el moment aplicat a una partícula és zero, **M**=0, aleshores la variació del moment angular és nula i per tant es mantindrà constant. Per tenir **M**=0 hi ha més d'una possibilitat:

i) Podem tenir **F**=0. En aquest cas tindrem que:

$$L = mrv\sin\theta = mvd$$

com que la velocitat s'ha de mantenir constant, d també ho serà.



ii) La partícula pot estar sotmesa a una força central. En aquest cas la força s'escriu com:

$$\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$$

Si calculem **M** resulta que:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = f(r)(\mathbf{r}\times\mathbf{r}) = 0$$

Per tant en aquest cas el moment angular es conserva.

6.4 Aplicació al moviment dels astres

La força gravitacional és una força central, és a dir, $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ (hem escollit com a origen del sistema de coordenades el punt O origen de la força). Per tant el moment produït per la força gravitacional és **M**=0 i el moment angular **L**=cte. Això té un seguit de conseqüències importants.

i) El moviment es realitza sobre una trajectòria plana. Com que **M**=0 podem escriure:

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

Aquesta igualtat es pot reescriure:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0$$

Integrant trobem que:

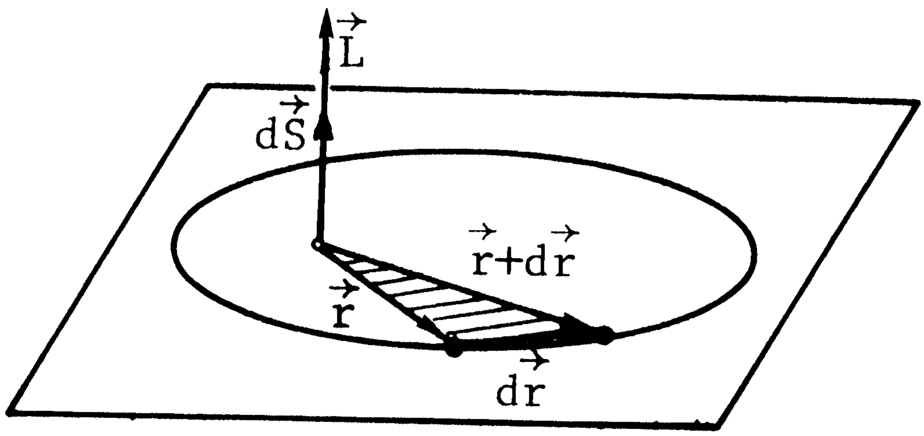
$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

on **h** és un vector constant. Si fem el producte escalar per **r** a dues bandes arribem a que:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = 0$$

Per tant **r** és perpendicular al vector constant **h** i per tant el moviment està confinat en un pla perpendicular a **h**. Com que hem escollit **r** amb origen a O el pla inclou el centre de força (punt on s'origina la força gravitacional).

ii) Si considerem un dt, la partícula escombra una àrea donada per:



$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

Aleshores, l'àrea escombrada per unitat de temps, es pot escriure, com:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{L}}{2m}$$

Per tant, la velocitat areolar és constant, és a dir, el radi vector escombra àrees iguals en temps iguals. Quan un planeta es troba més a prop del Sol es mourà més ràpid i quan està més allunyat es mourà a poc a poc. Aquest fet constitueix la segona llei de Kepler.