TEMA 29

Limitacions de la física clàssica

Mecànica relativista.

Postulats de la relativitat especial.

Algunes implicacions de la física relativista.

29

Limitacions de la física clàssica. Mecànica relativista. Postulats de la relativitat especial. Algunes implicacions de la física relativista.

29.1 Limitacions de la física clàssica

El principi de relativitat va ser establert per primer cop com a corolari de les seves lleis del moviment de Newton. El principi de relativitat estableix que les lleis de la mecànica són les mateixes per tots els sistemes de referència inercials.

En la mecànica Newtoniana el canvi de sistema de coordenades entre dos sistemes de referència inercials s'escrivia com (suposant els eixos paral·lels i la velocitat relativa de desplaçament sobre l'eix de les x):

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

Aquesta transformació rep el nom de transformació de Galileu. Si sobre les lleis de Newton efectuem aquestes transformacions les lleis de Newton resulten ser invariants.

Posteriorment, estudis molt rigorosos sobre electricitat, magnetisme i òptica porten a la formulació de les equacions de Maxwell del camp electromagnètic, que permet descriure l'electricitat, el magnetisme i l'òptica amb una única teoria. Les equacions de Maxwell no van mostrar mai en aquella època cap discrepància amb els experiments. Però les equacions de Maxwell no són invariants sota la transformació que hem escrit abans.

Si el principi de relativitat era cert per les equacions de Maxwell, això volia dir que la llum sempre viatjava a la mateixa velocitat independentment del sistema de referència i de la velocitat de l'emissor. I aquest fet va ser comprovat experimentalment per Michelson i Morley en el seu famós experiment. Per tant, això volia dir, que la llei de transformació que hem escrit abans no era correcta. També indicava, en contra del que es creia en aquella època, que no hi havia cap èter sobre el que es propagava la llum, l'existència del qual hagués permès mesurar la velocitat absoluta de qualsevol sistema de referència respecte de l'èter.

Primer Lorentz, amb una validesa més restringida, i després Poincaré amb una formulació de validesa general, van demostrar que les equacions de Maxwell eren invariants sota la transformació següent:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - \left(v/c^2\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

on β = v/c i κ(v) una constant depenent de la velocitat. Poincaré suggerí aleshores que potser totes les lleis de la física havien de ser de tal manera que havien de romandre invariants sota les transformacions de Lorentz.

Einstein segueix el suggeriment de Poincaré i se n'adona, que les equacions de Lorentz es poden deduir a partir de dos postulats senzills, a partir dels quals caldrà construir una nova mecànica: la mecànica relativista.

29.2 Postulats

Einstein va demostrar que era possible obtenir les transformacions de Lorentz a partir d'aquests postulats:

1. La velocitat de la llum és independent del moviment de la font lluminosa o del receptor, és a dir, la velocitat de la llum és la mateixa en tots els sistemes de referència en moviment uniforme respecte a la font.

2. Les lleis fonamentals de la Física per dos observadors qualsevols en moviment relatiu i uniforme són idèntiques.

Aquests dos postulats constitueixen el punt de partida del desenvolupament de tota la teoria de la relativitat especial. La teoria electromagnètica clàssica que s'expressa mitjançant les quatre equacions de Maxwell verifica de manera natural els dos postulats, i de fet en constitueixen la font d'inspiració.

29.3 Les transformacions de Lorentz

Anem a derivar ara les transformacions de Lorentz fent ús dels dos postulats. Considerem una font de llum puntual que es mou respecte d'un sistema de referència S(x,y,z,t) amb velocitat v, i considerem un segon observador S'(x',y',z',t') en repòs respecte a L. Ambdós observadors han de veure fronts d'ona esfèrics amb centres en repòs respecte de S i de S'. A partir d'aquest fet, podem derivar la transformació que connecta les coordenades (x,y,z,t) amb les coordenades (x',y',z',t') de dos sistemes de referència S i S' en moviment relatiu uniforme. L'eix x l'escollim de manera que coincideixi amb la direcció del moviment. Així, S' es mou respecte de S amb velocitat v en la direcció x positiva. Les transformacions hauran de verificar:

1. La fórmula de transformació ha de ser lineal, això es pot justificar dient que un moviment uniforme a S també ha de ser un moviment uniforme a S'. Això implica també la validesa de la geometria Euclidiana i la naturalesa homogènia de l'espai i el temps.

2. Si a S podem escriure l'equació del front d'ones com:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

aleshores l'equació del front d'ones a S' s'ha de poder escriure com:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

3. Qualsevol moviment paral·lel a l'eix x haurà de continuar essent-ho després de la transformació.

4. Per $v/c \to 0$ la transformació s'haurà de reduir a la galileana.

Podem intentar la següent transformació:

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t - ax$$

on γ i γ' hauran de tendir a la unitat i haurà de tendir a zero per $v/c \to 0$. Substituint en l'equació del front d'ona esfèric obtenim:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= (x^2 - 2vxt + v^2t^2) + y^2 + z^2 - c^2\left(t^2 - 2axt + a^2x^2\right) \\ &= \left(1 - a^2c^2\right)x^2 + y^2 + z^2 - c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t^2 + 2\left(ac^2 - v\right)xt \end{aligned}$$

Per començar, el terme lineal ha de ser nul, per tant

$$a = \frac{v}{c^2}$$

Substituint obtenim:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x^2 + y^2 + z^2 - c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t^2$$

Per tant la transformació no és satisfactòria. Ens apareix un factor d'escala $(1-v^2/c^2)$ que resulta fàcil d'eliminar. Per tant les transformacions es poden escriure definitivament com:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

A part de derivar les transformacions de Lorentz, hem arribat a un altre resultat que més endavant veurem que és de fonamental importància. La quantitat $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ té el mateix valor en tots els sistemes de referència inercials. Diem doncs que és una magnitud escalar.

29.4 Conseqüències immediates

29.4.1 La Simultaneïtat depèn del sistema de referència

Suposem dos esdeveniments (t_1, x_1) i (t_2, x_2) que a S succeeixen instantàniament, és a dir, $t_1 = t_2$. Aquests dos esdeveniments poden ser per exemple dues explosions simultànies en dos punts diferents sobre l'eix X. Anem a utilitzar les transformacions de Lorentz per veure que es veu a S':

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad t'_2 - t'_1 = \frac{-v/c^2\left(x_2 - x_1\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

A S', veuen les dues explosions separades per una distància més gran. A més succeeixen en instants diferents de temps i quina de les dues explosions és la primera depèn de la posició de les explosions: la que està més a l'esquerra sempre és la que succeeix primer respecte de S'.

29.4.2 Dilatació del temps

Suposem que un determinat fenomen, que té lloc a S en un punt x_0, comença en el temps t_1 i acaba en el temps t_2. El fenomen, doncs, dura un temps $\tau = t_2-t_1$. A τ se l'anomena temps propi. A S', el mateix fenomen dura un temps:

$$\Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

que resulta ser superior. Per tant a S' el temps sembla que es dilati. Exemple: una partícula subatòmica inestable dura més temps si es mou a una velocitat propera a la de la llum que si roman estacionària.

Hi ha una manera de deduir aquest resultat directament dels principis bàsics. Suposem que construïm un rellotge ("Rellotge d'Einstein") que consisteix en dos miralls paral·lels, situats un damunt de l'altra. Quan es produeix un feix de llum vertical, la llum comença a anar cap amunt i cap avall, i suposem que fa clic cada vegada que la llum arriba al mirall de sota. Posem ara un rellotge d'Einstein a S' i un altre a S prèviament sincronitzats. Anem a veure que passa a S' respecte de S. Veiem que a S' la llum ara es veu obligada a recórrer un camí en forma de ziga-zaga. Aquest camí és més llarg que el camí que la llum ens fa a S, i com que la velocitat de la llum és la mateixa en tots dos sistemes, deduïm que el temps passa més lentament a S'. Anem a veure si deduïm la mateixa expressió.

La meitat de la base de la ziga-zaga és $\frac{1}{2}V\cdot\tau$. Cada costat mesura $\frac{1}{2}c\cdot\tau$. La separació dels miralls és L. Respecte de S, la llum puja i baixa en un temps Δt i per tant $L=\frac{1}{2}c\cdot\Delta t$. Per Pitàgores:

$$V^2\tau^2 + c^2\Delta t^2 = c^2\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \tau^2 = \frac{\Delta t^2}{1-V^2/c^2} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

29.4.3 Contracció de longituds

Considerem una vareta al llarg de l'eix X en el sistema S. Com que està en repòs les coordenades de posició dels seus extrems són x_1 i x_2 i aquestes coordenades són independents del temps. La longitud de la barra, que anomenem longitud pròpia s'escriu com $L_0 = x_2-x_1$.

Examinem la vareta des del sistema de referència S'. Determinem la longitud de la vareta $L'=\Delta x'$ en un instant t'. Aleshores:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ L_0 &= \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \quad L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

Per tant, un objecte en moviment és més curt en la direcció del moviment respecte d'un sistema en repòs.

29.4.4 Un exemple de la congruència entre la dilatació del temps i la contracció de longituds.

Suposem a S un feix de llum que surt d'un colimador i que va a parar a una cèl·lula fotoelèctrica. Un sistema com aquest es pot utilitzar per mesurar longituds. Suposem que coneixem la velocitat d'un mòbil solidari amb S' que es mou perpendicularment al feix. Quan travessa el feix, l'interromp durant un cert temps Δt. Per tant diem que l'objecte deu tenir una longitud L equivalent a:

$$L = v\Delta t$$

Els que viuen dins de l'objecte diuen, però, que són travessats pel feix durant un temps més gran, degut a la dilatació del temps. Per tant:

$$L_0 = \frac{v\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

Arribem a la conclusió que la longitud que hem mesurat a S és més curta que la que és mesura en el sistema propi S'.

29.5 Suma de velocitats

Suposem que una partícula es mou amb velocitat (v'_x, v'_y, v'_z) respecte al sistema S'. Quines són les components de la velocitat (v_x, v_y, v_z) al sistema S? Per respondre aquesta pregunta escrivim les transformacions de Lorentz i diferenciem:

$$x = \gamma x' + \gamma v t' \qquad t = \gamma t' + \frac{\gamma v}{c^2}x'$$

$$dx = \gamma dx' + \gamma v dt' \qquad dt = \gamma dt' + \frac{\gamma v}{c^2}dx'$$

Aplicant la definició de velocitat:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dx' + \gamma v dt'}{\gamma dt' + \frac{\gamma v}{c} dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V / c^2}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma dt' + \frac{\gamma v}{c} dx'} = \frac{v'_y}{1 + v'_x V / c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z}{1 + v'_x V / c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Podem comprovar que la velocitat de la llum no depèn del sistema de referència. Si fem $v_x' = c$, obtenim $v_x = c$.

Suposem ara que la velocitat de la partícula a S' és perpendicular a V, és a dir, tenim que la velocitat és per exemple: ($v'_x = 0$, v'_y, $v'_z = 0$). En aquest cas les equacions són molt més simples:

$$v_x = V$$

$$v_y = v'_y \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_z = v'_y \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Fixem-nos que el factor que ens apareix és purament degut a la dilatació del temps.

29.6 Espai-Temps

29.6.1 Les transformacions de Lorentz lliguen espai i temps

Hem vist com el canvi de coordenades entre dos sistemes de referència inercials ve donat per les transformacions de Lorentz. Aquestes transformacions permet passar de l'observació d'un determinat esdeveniment (t,**r**) a S al corresponent esdeveniment (t',**r'**) a S', on S' és un sistema inercial que es mou a velocitat v respecte de S. Agafant els eixos convenientment i escollint c=1 (equivalent a prendre com a unitat de longitud la distància que la llum recorre en un segon) podem escriure les transformacions com:

$$t' = \gamma(t - vx)$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Podem observar la brutal meravellosa i simple simetria entre x i t i la importància d'identificar un esdeveniment amb el temps i les tres coordenades espacials. El fet que un canvi de sistema de referència impliqui indissolublement tots 4 nombres en els dos sistemes, suggereix de forma immediata que l'espai físic és un espai de 4 dimensions format per tots els esdeveniments (t,**r**) possibles. És a dir, el temps és una coordenada i les altres tres són les coordenades espacials. A aquest espai de 4 dimensions l'anomenem espai-temps.

29.6.2 4-vectors. Producte escalar

Un canvi de sistema de referència inercial representa un canvi de coordenades de l'espai-temps que s'expressa mitjançant les transformacions de Lorentz. Queda clar doncs que a partir d'ara treballem en 4-dimensions. De manera anàloga a com vam fer en l'espai euclidià de tres dimensions, definim ara un 4-vector com un conjunt de 4 quantitats (a_t, a_x, a_y, a_z) que es transformen com (t,x,y,z) quan canviem a un altre sistema de referència inercial. És a dir, que per saber si un conjunt de 4 quantitats a S constitueix un quadrivector hem de comprovar podem utilitzar les transformacions de Lorentz per calcular les corresponents quatre quantitats a S'. Hi ha moltes maneres d'escriure 4-vectors, nosaltres els escriurem com $a_\mu = (a_t, \mathbf{a})$.

Quan varem deduir les transformacions de Lorentz vàrem veure que tenen una propietat important: donat un determinat esdeveniment amb coordenades (t,**r**) a S i el corresponent esdeveniment (t',**r**') a S' la següent quantitat roman invariant:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

A partir d'aquí traurem conseqüències fonamentals. Fixem-nos en l'estructura d'aquesta igualtat. Hi intervenen totes les coordenades elevades al quadrat i el resultat és un escalar. La validesa d'aquesta invariància és general per tots els quadrivectors: la invariància no depèn de que representen les coordenades, si no que únicament prové del fet que els quadrivectors es transformin segons les transformacions de Lorentz. Per tant per a qualsevol quadrivector tindrem:

$$a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t'^2 - a_x'^2 - a_y'^2 - a_z'^2$$

Un pas més. Suposem que tenim dos 4-vectors a_μ i b_μ. Com que tots dos conjunts de quantitats es transformen de la mateixa manera, la combinació:

$$a_\mu b_\mu \equiv a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = a'_\mu b'_\mu \equiv a'_t b'_t - a'_x b'_x - a'_y b'_y - a'_z b'_z$$

és també una quantitat escalar.

29.7 Cinemàtica

29.7.1 Parametrització de les equacions del moviment

A la mecànica Newtoniana, la trajectòria d'una partícula ve en general donada per la funció **r**(t). En aquest tractament, la característica fonamental de t és que l'interval dt entre dos instants de l'evolució de la partícula és invariant, és a dir, té el mateix valor a qualsevol sistema de referència inercial no relativista. Diem que a la mecànica newtoniana el temps és un paràmetre invariant.

Amb la modificació relativista, t ja no és un paràmetre invariant. Seguint Minkowski, convé representar sobre l'espai temps l'evolució de la partícula, que serà una línia continua (anomenada línia de l'univers) La línia de l'univers és una corba 1-dimensional i per tant per definir-la caldrà donar les quatre coordenades en funció d'un paràmetre que caldrà que sigui invariant. En particular resulta convenient prendre s on s ve definit com:

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2$$

i com ja sabem, és una magnitud invariant. Aquesta expressió es pot rescriure fàcilment en termes del temps propi de la partícula:

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 = dt^2 - v^2 dt^2 = \left(\sqrt{1-v^2}\,dt\right)^2 = d\tau^2$$

Per tant en el sistema de la partícula ds = dτ. Per tant el paràmetre natural per descriure el moviment de la partícula és el seu temps propi.

29.7.2 4-vector velocitat i acceleració

Prenent s ò τ com a paràmetre natural s'escriu la velocitat d'una partícula com:

$$u_\mu = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right) = \left(\gamma, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$$

Una propietat important d'aquesta definició és que:

$$u_\mu^2 = \gamma^2 - \gamma^2 v^2 = \left(1-v^2\right)\gamma^2 = 1$$

Definim anàlogament la 4-acceleració com:

$$b_\mu = \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = \frac{du_\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\gamma}{d\tau}, \frac{d(\gamma\mathbf{v})}{d\tau}\right) = \left(\frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{d\tau}, \frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)$$

$$b_\mu = \left(\frac{1}{2}\frac{d\gamma^2}{dt}, \mathbf{v}\frac{1}{2}\frac{d\gamma^2}{dt} + \gamma^2\mathbf{a}\right) = \left(\gamma\frac{d\gamma}{dt}, \mathbf{v}\gamma^4(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}) + \gamma^2\mathbf{a}\right)$$

$$b_\mu = \left(\gamma^4(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}), \gamma^2\mathbf{a} + \gamma^4(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{v}\right)$$

En el sistema solidari amb la partícula, la 4-velocitat i la 4-acceleració es poden escriure com:

$$u'_\mu = (1, \mathbf{0}) \qquad b'_\mu = (0, \mathbf{a}')$$

Anem a relacionar ara l'acceleració **a'** que es veu en el sistema de la partícula i l'acceleració **a** que es veu en el sistema S. Suposem que la velocitat de la partícula està en la direcció x. Aplicant les transformacions de Lorentz tindrem que:

$$\begin{array}{lllllll} b_t & = & \gamma\left(b'_t + v b'_x\right) & = & \gamma v a'_x & = & \gamma^4 v a_x \\ b_x & = & \gamma\left(b'_x + v b'_t\right) & = & \gamma a'_x & = & \gamma^2 a_x + \gamma^4 v^2 a_x = \gamma^4 a_x \\ b_y & = & b'_y & = & a'_y & = & \gamma^2 a_y \\ b_z & = & b'_z & = & a'_z & = & \gamma^2 a_z \end{array}$$

Per tant tenim que:

$$\begin{array}{lll} a_x & = & \gamma^{-3} a'_x \\ a_y & = & \gamma^{-2} a'_y \\ a_z & = & \gamma^{-2} a'_z \end{array}$$

29.7.3 Acceleració uniforme longitudinal

Anem a suposar que l'acceleració és paral·lela a la velocitat i constant en el sistema de la partícula. Suposem un coet que crema el seu combustible de manera que l'acceleració que mesura l'acceleròmetre del coet doni un valor constant. Agafem l'eix X paral·lel a la velocitat podem escriure $a'_x = a$ i la resta de components zero. Considerarem que per t=0, x=0 i v=0. L'acceleració en el sistema S s'escriurà com:

$$a = \gamma^{-3} a' = \left(1 - v^2\right)^{3/2} a'$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(1 - v^2\right)^{3/2} a' \qquad \frac{dv}{\left(1 - v^2\right)^{3/2}} = a' dt$$

$$\frac{v}{\left(1 - v^2\right)^{1/2}} = a' t \qquad v = \frac{a' t}{\sqrt{1 + \left(a' t\right)^2}}$$

Per tant la velocitat tendeix assimptòticament a la velocitat de la llum. Si tornem a integrar:

$$dx = \frac{a' t dt}{\sqrt{1 + \left(a' t\right)^2}} \qquad x = \frac{1}{a'} \sqrt{1 + \left(a' t\right)^2} - \frac{1}{a'}$$

trobem la dependència de x amb el temps.

29.8 Mecànica Relativista

Dos principis bàsics de la Mecànica Clàssica són la conservació del moment i la conservació de l'energia. El moment era un vector amb tres components espacials i l'energia una magnitud escalar. En la mecànica relativista, la situació canvia radicalment i s'estableix una relació molt més profunda entre moment i energia.

Començarem pensant com definir en l'espai-temps un quadrivector moment d'una partícula que mou a velocitat v. Aquest quadrivector, el podrem definir com el producte de la massa en repòs de la partícula en consideració (una magnitud escalar per definició) amb el quadrivector velocitat:

$$p_\mu = m_0 u_\mu = \gamma m_0 \left(1, \mathbf{u}\right)$$

$$p_t = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}} \quad p_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2}} \quad p_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2}} \quad p_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2}}$$

Quin significat té la component p_t? Per esbrinar-ho, anem a veure que passa si considerem velocitats petites, és a dir, $u/c \to 0$. Per tant, recuperarem les c i desenvolupem en sèrie de Taylor:

$$p_t = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \simeq m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) = m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{u^2}{c^2}$$

$$c^2 p_t = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2$$

El segon terme és l'energia cinètica Newtoniana. Seguint a Einstein, direm aleshores que la component temporal del 4-vector moment és l'energia total d'una dividida per c^2, i que el primer terme del desenvolupament representa l'energia en repòs de la partícula.

Si calculem el mòdul del 4-vector moment:

$$p_\mu p_\mu = \left(cp_t\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{m_0^2}{1-u^2/c^2}\left(c^2-u^2\right) = m_0^2 c^2$$

El mòdul és un valor constant que equival a l'energia en repòs al quadrat dividida de c^2. Si escrivim p_t en termes de l'energia obtenim:

$$p_\mu p_\mu = \left(cp_t\right)^2 - \mathbf{p}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^2$$

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Hi ha una partícula a la Natura que té massa en repòs nul·la, el fotó, i aleshores el mòdul del 4-vector moment té mòdul zero. Per un fotó podem escriure aleshores:

$$E = cp$$

Resulta interessant aplicar les transformacions de Lorentz a p_μ per passar d'un sistema inercial S a un altre sistema inercial S' (c=1):

$$\begin{aligned} E' &= \gamma\left(E - vp_x\right) \\ p'_x &= \gamma\left(p_x - vE\right) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \end{aligned}$$

Veiem que el que a S' s'anomena energia, és una barreja del que anomenem energia i moment en el sistema S. Anàlogament pel que anomenem moment. El moment i l'energia estan tant relacionats entre si com l'espai i el temps.

29.8.1 Conservació del moment

Suposem que tenim una col·lecció de partícules que constitueixen un sistema aïllat, cadascuna amb el seu propi 4-vector moment. Postulem aleshores que la suma de moments equival a un 4-vector constant:

$$\sum_i p_\mu^{(i} = C_\mu$$

Si C_μ és un vector constant a S, també ho serà a qualsevol altre sistema inercial S', degut a l'estructura de les transformacions de Lorentz. Fixem-nos, doncs que la validesa d'aquesta llei implica simultàniament la conservació de l'energia i del moment. De fet, en la mecànica relativista, la conservació de l'energia i la conservació del moment són inseparables i dependents l'una de l'altra.

La validesa de la llei de conservació del moment només es pot establir experimentalment. En els apartats següents exposarem diverses situacions que han permès comprovar la validesa d'aquesta llei.

29.9 Exemples d'aplicació de la mecànica relativista: conservació del moment

La classe d'experiments que volem analitzar tindran la forma:

$$A + B \longrightarrow C + D + \ldots$$

La conservació del moment i de l'energia s'escriurà com:

$$p_A^\mu + p_B^\mu = q_C^\mu + q_D^\mu$$

Tindrem com a dades els quadrivectors A i B i haurem de donar alguna informació sobre C o D. Si suposem que només hi ha dues partícules resultants C i D i que ens interessa especialment que li passa a C. Escriurem aleshores:

$$q_D^\mu = p_A^\mu + p_B^\mu - q_C^\mu$$

i elevant al quadrat:

$$m_D^2 = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + 2p_A^\mu p_B^\mu - 2p_A^\mu q_C^\mu - 2p_B^\mu q_C^\mu$$

d'aquesta manera només ens queda com a incògnites magnituds relacionades amb C.

29.9.1 Decaïment d'un àtom excitat

Suposem que un àtom excitat és mou sobre l'eix x i emet un fotó. El fotó surt formant un angle φ amb l'eix x. Escrivim $A^* \longrightarrow A + \gamma$. Volem calcular la dependència de l'energia del fotó E_γ amb l'angle d'emissió γ. Escrivim:

$$p_{A^*}^\mu = q_A^\mu + q_\gamma^\mu \qquad \Rightarrow \qquad q_A^\mu = p_{A^*}^\mu - q_\gamma^\mu$$

$$m_A^2 = m_{A^*}^2 - 2p_{A^*}^\mu q_\gamma^\mu$$

$$m_A^2 = m_{A^*}^2 - 2E_{A^*}E_\gamma + 2\mathbf{p}_{A^*}\mathbf{q}_\gamma$$

Com que el fotó té massa zero, aleshores $q_\gamma = E_\gamma$. Substituint:

$$m_A^2 = m_{A^*}^2 - 2E_{A^*}E_\gamma + 2p_{A^*}q_\gamma \cos\varphi$$

$$E_\gamma = \frac{m_{A^*}^2 - m_A^2}{2\left(E_{A^*} - p_{A^*}\cos\varphi\right)}$$

29.9.2 Aniquilació Positró-Electró

Quan un electró i un positró es troben emeten dos raigs γ. Suposem el positró parat, l'electró que s'apropa per l'eix x i després de la col·lisió, els dos fotons γ formant els angles φ_1 i φ_2 amb l'eix x (un per sobre i l'altre i per sota). Volem calcular quina és l'energia en funció de l'angle que fan els dos fotons. La llei de conservació es pot escriure com:

$$p_+^\mu + p_-^\mu = q_{\gamma_1}^\mu + q_{\gamma_2}^\mu \qquad \Rightarrow \qquad q_{\gamma_2}^\mu = p_+^\mu + p_-^\mu - q_{\gamma_1}^\mu$$

Anem a veure que passa amb el fotó 1. Elevant al quadrat:

$$q_{\gamma_2}^\mu = p_+^\mu + p_-^\mu - q_{\gamma_1}^\mu$$

$$0 = m_+^2 + m_-^2 + 0 + 2m_+E_- - 2m_+E_{\gamma_1} - 2E_{\gamma_1}E_- + 2\mathbf{p}_-\mathbf{q}_{\gamma_1}$$

$$0 = 2m^2 + 0 + 2m_+E_- - 2m_+E_{\gamma_1} - 2E_{\gamma_1}E_- + 2p_-E_{\gamma_1}\cos\varphi_1$$

Arreglant l'expressió podem calcular $E_{\gamma 1}$:

$$0 = 2m(E_- + m) - 2mE_{\gamma_1} - 2E_{\gamma_1}E_- + 2p_-E_{\gamma_1}\cos\varphi_1$$

$$E_{\gamma_1} = \frac{m(E_- + m)}{(E_- + m) - p_-\cos\varphi_1}$$

Si el fotó 1 és emès cap a la dreta (φ_1=0) aleshores la seva energia és màxima. Per tant aleshores el fotó 2 serà emès amb la mínima energia possible amb $\varphi_2 = \pi$.

29.9.3 Dispersió Compton

Suposem ara un electró en repòs que interacciona amb un fotó que és dispersat. El problema que ens plantegem és trobar l'energia del fotó dispersat en funció de l'angle entre el fotó incident i el fotó dispersat. Seguim, doncs el mateix procés:

$$p_-^\mu + p_\gamma^\mu = q_-^\mu + q_{\gamma'}^\mu \quad \Rightarrow \quad q_-^\mu = p_-^\mu + p_\gamma^\mu - q_{\gamma'}^\mu$$

$$m^2 = m^2 + 2m_- E_\gamma - 2m_- E_{\gamma'} - 2E_\gamma E_{\gamma'} + 2\mathbf{p}_\gamma \mathbf{q}_{\gamma'}$$

$$0 = m_- E_\gamma - m_- E_{\gamma'} - E_\gamma E_{\gamma'} + E_\gamma E_{\gamma'} \cos\varphi$$

$$E_{\gamma'} = \frac{m_- E_\gamma}{m_- + E_\gamma - E_\gamma \cos\varphi}$$

$$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}\left(1-\cos\varphi\right)}$$

Aquesta expressió normalment es rescriu en termes de les longituds d'ones. Per a un fotó $\lambda\nu = c$ i $E = h\nu$, per tant $E = hc/\lambda$. Substituint:

$$\frac{hc}{\lambda'} = \frac{\frac{hc}{\lambda}}{1 + \frac{h}{mc\lambda}\left(1-\cos\varphi\right)} \quad \Rightarrow \quad \lambda' = \lambda\left[1 + \frac{h}{mc\lambda}\left(1-\cos\varphi\right)\right]$$

$$\lambda' - \lambda = \lambda_e\left(1-\cos\varphi\right)$$

on λ_e és l'anomenada longitud d'ona de compton $\lambda_e = \dfrac{h}{mc} = 242{,}6$ Å.

29.10. Efecte Doppler

Anem a descriure ones que es propaguen en el buit. Comencem considerant una ona plana monocromàtica:

$$\psi = A\exp\left[i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)\right]$$

La fase de l'ona és una magnitud escalar. Considerant un sistema S i un sistema S' com de costum, si la fase de l'ona és un escalar s'haurà de verificar que:

$$\omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega' t' - k_x' x' - k_y' y' - k_z' z'$$

Si la fase de l'ona és un escalar, i (t, **r**) és un 4-vector, podem concloure aleshores que $\left(\omega/c^2, \mathbf{k}\right)$ també és un quadrivector. La fase de l'ona és el producte escalar de dos 4-vectors. Per tant podem escriure:

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma\left(\omega - v k_x\right) \\ k'_x &= \gamma\left(k_x - v\,\omega/c^2\right) \\ k'_y &= k_y \\ k'_z &= k_z \end{aligned}$$

Si escrivim:

$$k_x = k\cos\varphi \qquad k_y = k\sin\varphi \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

on φ és l'angle que forma **k** i l'eix x, obtenim per la freqüència la següent expressió:

$$\omega' = \gamma\left(\omega - v k_x\right) = \frac{\omega - \left(\omega v/c\right)\cos\varphi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega\frac{1 - \left(v/c\right)\cos\varphi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Si $\varphi = 0$ (és a dir, l'ona es propaga en la direcció x) aleshores:

$$\omega' = \omega\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

Aquest resultat també es pot escriure en termes de les longituds d'ona:

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Si una Galàxia s'ens allunya, observarem un increment de les longituds d'ona de l'espectre, conegut com a corriment cap al vermell. Si la Galàxia s'apropa observarem l'efecte contrari, i parlem de corriment cap al blau.