TEMA 27

Òptica Física

Propietats de les ones lluminoses

Observació en el laboratori

Teoria física del color

Espectrofotometria

27

Òptica Física. Propietats de les ones lluminoses. Observació en el laboratori. Teoria física del color. Espectrofotometria.

27.1 Naturalesa Ondulatòria de la llum. Difracció

La llum es propaga per l'espai com una ona. Aquest principi fonamental va ser formulat en forma consistent per James Clerk Maxwell. Maxwell formula les lleis de l'electromagnetisme amb un conjunt de 4 equacions. D'aquestes equacions es dedueix l'existència d'una ona transversal electromagnètica que viatge a la velocitat de la llum.

Quan els efectes de la polarització són menyspreables, és a dir, no ens importa l'orientació relativa dels camps elèctric i magnètic, la propagació a l'espai lliure queda totalment descrita mitjançant la següent equació:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

anomenada equació escalar d'ones, ∇^2 és l'operador Laplacià i la funció u en el cas d'ones polaritzades linealment es pot considerar que representa la magnitud del camp elèctric o del camp magnètic.

Per a una ona monocromàtica podem escriure explícitament el camp en un punt p en notació complexa com:

$$u(p,t) = U(p)\exp(-i2\pi\nu t)$$

Substituint aquesta equació en l'anterior obtindrem una equació per a U, anomenat amplitud complexa del camp elèctric, que ha d'obeir la següent equació independent del temps:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)U = 0$$

on k és el nombre d'ones definit com:

$$k = 2\pi\frac{\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

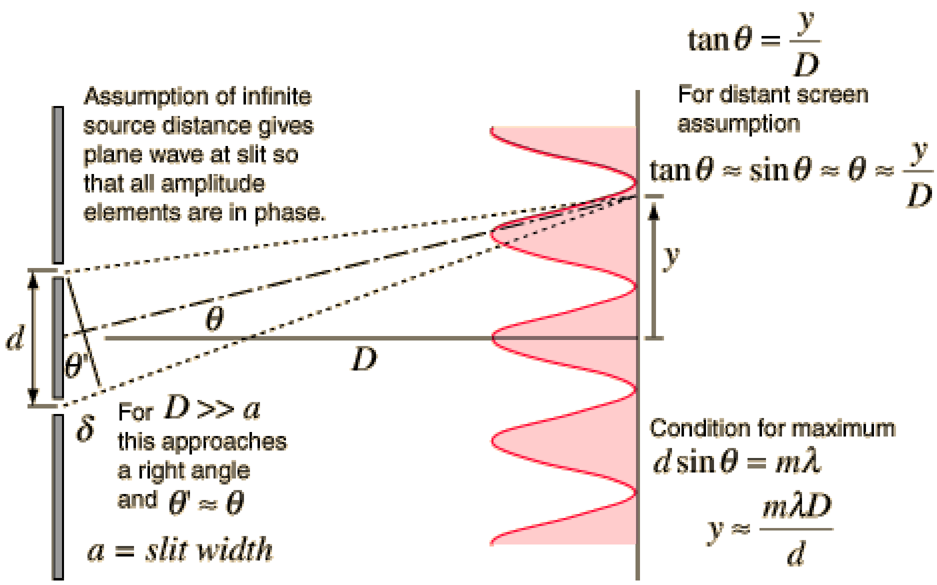
Aquesta equació que hem obtingut s'anomena equació de Helmholtz i és l'equació diferencial que regeix la propagació de la llum a l'espai lliure quan els efectes de la polarització no són importants. Imposant condicions de contorn a a aquesta equació es podrien obtenir les solucions pels diferents casos.

Des del punt de vista històric però, es va seguir un camí força diferent. Per tal d'explicar fenòmens de difracció, Christian Huygens va proposar l'any 1678, i per primer cop, una teoria ondulatòria de la llum. Va expressar el seu concepte intuïtiu del fenomen de la propagació de la manera següent: si cada punt de la superfície d'una ona es pogués considerar com una font d'una nova pertorbació esfèrica secundària, aleshores es podria determinar la superfície de l'ona en qualsevol instant posterior construint l'envolvent de les ones secundàries. Les idees intuïtives de Huygens foren posteriorment utilitzades per Agoustin Fresnel (1818), que va afegir a la construcció de l'envolvent el principi d'interferència. Afegint algunes hipòtesis suplementàries sobre les amplituds i les fases de les ones secundàries i considerant que les ones secundàries interferien entre elles, Fresnel va aconseguir calcular patrons de difracció amb una gran precisió.

L'any 1882 Gustav Kirchhoff soluciona l'equació de Helmholtz i dóna a les idees de Huygens i Fresnel una sòlida base teòrica. Kirchhoff demostra que les amplituds i les fases atribuïdes per Fresnel a les ones secundàries són una conseqüència lògica de la naturalesa ondulatòria de la llum.

27.2. Experiment de Young. Interferència deguda a dues escletxes

Suposem que tenim dos petits forats o escletxes verticals sobre les que incideix una ona plana monocromàtica perpendicularment a la paret on es troben els forats. Els forats podem suposar que en primera aproximació es converteixen en emissors de noves ones esfèriques. Estem interessats en calcular l'efecte de la interferència d'aquestes dues ones a una distància molt gran.



Matemàticament hem de trobar la suma de dues ones:

$$R = A_1 \exp\left[i\left(\omega t - kr_1\right)\right] + A_2 \exp\left[i\left(\omega t - kr_2\right)\right]$$

on r_1 i r_2 són les distàncies dels forats als punts on volem calcular la interferència. Anem a fer-ho pel cas particular en que les dues amplituds són iguals:

$$R = A\cos\left(\omega t - kr_1\right) + A\cos\left(\omega t - kr_2\right)$$
$$R = 2A\cos\left(\tfrac{1}{2}k\left[r_2 - r_1\right]\right)\cos\left(\omega t + \tfrac{1}{2}k\left[r_2 + r_1\right]\right)$$

Observem que obtenim una nova ona amb una nova fase i una nova amplitud. L'amplitud es pot escriure com:

$$A_R = 2A\cos\left(\tfrac{1}{2}k\left[r_2 - r_1\right]\right)$$

La condició per a que l'interferència correspongui a un màxim serà:

$$\tfrac{1}{2}k\left[r_2 - r_1\right] \simeq \frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta = m\pi$$

Si escrivim el sinus de l'angle en termes de la distància a la que volem observar les interferències i de la coordenada y obtenim:

$$y_n = m\frac{\lambda D}{d}$$

Si l'amplitud de les dues ones no fos igual, podem calcular fàcilment la intensitat a partir de la suma de les amplituds complexes:

$$I = RR^* = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos\left(k\left[r_1 - r_2\right]\right)$$

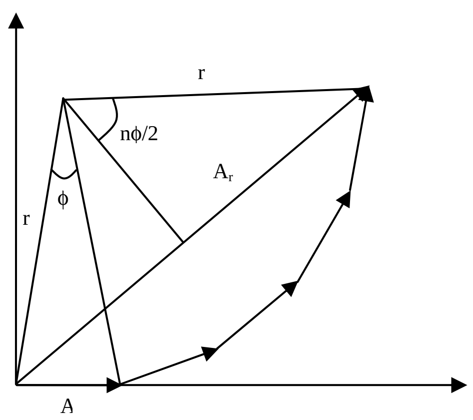
i la condició per a obtenir màxims i mínims d'interferència seguirà sent la mateixa, amb la diferència que els mínims no són zero.

27.3 Interferència deguda a n escletxes. Xarxa de difracció.

Suposem ara que hem de sumar la contribució deguda a n escletxes. Suposarem que cada escletxa té una amplada molt petita i que origina una ona esfèrica secundària, quan tot el conjunt d'escletxes és il·luminat amb una ona plana monocromàtica. Aleshores hem de fer una suma de l'estil:

$$R = A\left[\exp(i\omega t) + \exp(i\left(\omega t + \phi\right)) + \exp(i\left(\omega t + 2\phi\right)) + \ldots + \exp(i\left(\omega t + (n-1)\phi\right))\right]$$

on $\phi = 2\pi d\sin\theta/\lambda$. Si representem aquesta suma geomètricament:



Veiem que els fasors defineixen un polígon de n costats i que els vèrtex es troben sobre un cercle. El radi d'aquest cercle haurà de verificar que:

$$\frac{A/2}{r} = \sin\frac{\phi}{2}$$

D'altra banda, també veiem que:

$$\frac{A_r/2}{r} = \sin\frac{n\phi}{2}$$

Per tant, podem escriure immediatament que:

$$A_r = A\frac{\sin n\phi/2}{\sin\phi/2}$$

i la intensitat:

$$I = I_0\frac{\sin^2 n\phi/2}{\sin^2\phi/2}$$

Anem ara a analitzar aquesta expressió. Per ϕ molt petit podem escriure:

$$I = I_0\left(\frac{n\phi/2}{\phi/2}\right)^2 = n^2 I_0$$

Conforme ϕ augmenta, I va disminuint fins que arriba a zero. Això és fàcil de veure si es té en compte que el numerador varia molt més ràpidament que el denominador. La condició de mínim esdevé doncs:

$$\frac{n\phi}{2} = \pi$$

Si es verifica aquesta condició, els fasors descriuen un cercle tancat i per tant la suma és zero. Anem a veure que significa aquesta expressió. Si substituïm el valor de ϕ obtenim:

$$nd\sin\theta = \lambda$$

nd és la longitud de les n escletxes. Per tant obtenim un mínim quan la diferència de fase entre la primera escletxa i la última correspon a 2π o a una longitud d'ona.

El primer màxim subsidiari correspondrà molt aproximadament al màxim de la funció sinus del numerador en l'expressió de I. Per tant s'haurà de verificar:

$$n\phi/2 = 3\pi/2 \qquad \phi/2 = 3\pi/2n$$

$$I = I_0\frac{1}{\sin^2 3\pi/2n} \simeq \frac{4}{9\pi^2}n^2 I_0 = 0.047n^2 I_0$$

Ja veiem que aquest màxim subsidiari és molt petit i que té una intensitat que no arriba al 5% de la intensitat del màxim principal. Per tant I és una funció que té un màxim central molt estret envoltat de màxims subsidiaris molt petits.

Com que l'expressió per a I està escrita en termes de funcions sinus, és evident que si l'angle ϕ l'incrementem per qualsevol múltiple de 2π, l'expressió no varia. Per tant hem de tenir altres màxims principals per $\phi = 2\pi m$ o:

$$d \sin\theta = m\lambda$$

Fixem-nos que aquests màxims es corresponen amb els màxims que obteníem quan només fèiem interferir dues escletxes. Del número m en diem ordre de difracció. Fixem-nos que una condició necessària per a tenir un o més ordres de difracció és que d sigui més gran que la longitud d'ona.

27.3.1 Resolució d'una xarxa de difracció

Les xarxes de difracció es fan servir per obtenir espectres, és a dir, que permeten desviar la llum de diferents longituds d'ona en direccions diferents, tal i com veiem a partir de l'última expressió que hem escrit:

$$\sin\theta_{\lambda,m} = m\frac{\lambda}{d}$$

Voldríem saber quina és la resolució d'una xarxa de difracció, és a dir, donada una longitud d'ona, en quant haig d'incrementar la longitud d'ona per a que podem detectar que surt en una direcció diferent. Ja hem vist que cada longitud d'ona dona lloc a un màxim principal que té una certa amplada. Direm que dues longituds d'ona es poden separar amb la xarxa si la distància entre els màxims principals correspon a la distància entre un màxim principal i el primer mínim (criteri de Rayleigh), és a dir, el màxim d'una longitud d'ona cau sobre el primer mínim de l'altre.

Considerem aleshores un cert angle θ que correspon a un màxim d'ordre m per a longitud d'ona λ'. Això implica que $nd\sin\theta = mn\lambda'$. Si per a la longitud λ, el mateix angle ha de correspondre a un mínim, aleshores s'ha de verificar que $nd\sin\theta = mn\lambda + \lambda$. Si escrivim $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ aleshores trobem que:

$$mn(\lambda + \Delta\lambda) = mn\lambda + \lambda$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mn}$$

27.4 Difracció

La característica principal de la difracció és la desviació respecte de la propagació rectilínia que sorgeix quan una ona és obstruïda d'alguna manera. No hi ha una distinció clara entre els termes interferència i difracció. Normalment es fa servir la paraula interferència si considerem la suma d'un nombre petit d'ones i parlem de difracció quan em de sumar un nombre molt elevat, o fins tot infinit, d'ones. Resulta interessant considerar el càlcul de la difracció d'una obertura quan la distància a la que volem calcular el patró de difracció és molt gran. En aquest cas parlem de difracció de Fraunhofer.

27.4.1 Difracció de Fraunhofer

Anem a considerar una escletxa d'amplada L. Ja sabem que la interferència deguda n ones esfèriques que s'originen en punts separat per una distància d es pot escriure com (apartat 22.2):

$$I = I_0 \frac{\sin^2 n\phi/2}{\sin^2 \phi/2} \qquad \phi = 2\pi d \sin\theta/\lambda$$

Si considerem els límits $d \to 0,\ n \to \infty$ amb la condició nd=L, trobarem l'expressió corresponent a la difracció d'una escletxa d'amplada L.

Haurem de tenir en compte que fem amb I_0. Podem considerar que cada ona esfèrica emet una quantitat d'energia proporcional a L/n. Això ens obliga a fer el canvi $I_0 \to I_0/n$. Si no fessim aquest canvi, la suma d'infinites ones d'intensitat finita ens donaria infinit. Finalment doncs haurem de calcular:

$$I = \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty\\ nd=L}} I_0 \frac{\sin^2 n\phi/2}{n\sin^2 \phi/2} \qquad \phi = 2\pi d \sin\theta/\lambda$$

Fent els límits i escribint $\sin\theta = y/D$ obtenim:

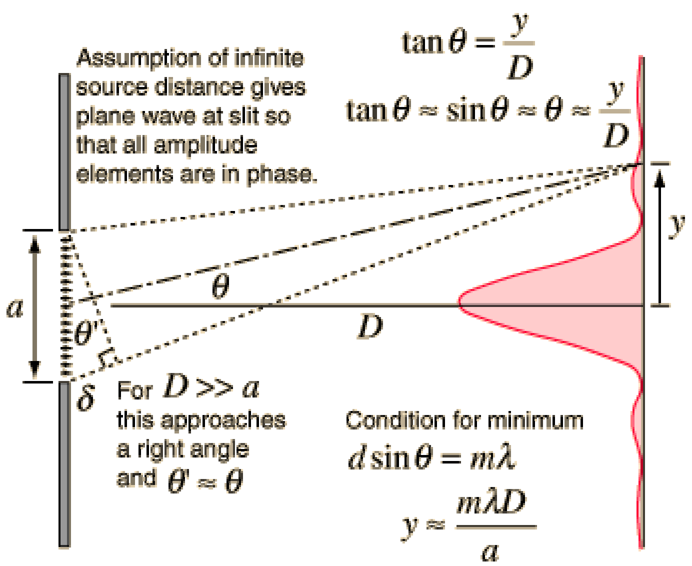
$$\lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty\\ nd=L}} n\sin\phi/2 = \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty\\ nd=L}} n\phi/2 = \lim_{\substack{d\to 0\\ n\to\infty\\ nd=L}} \frac{\pi nd}{\lambda D} y = \frac{\pi L}{\lambda D} y$$

Substituint obtenim:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\pi y L/\lambda D)}{\pi y L/\lambda D} \right)^2$$

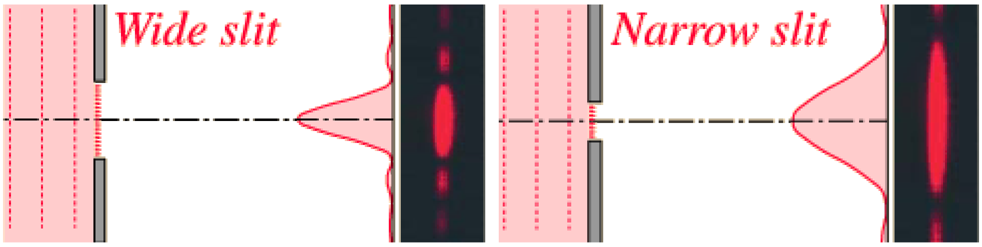
Normalment es defineix la funció sinc x=sin(πx)/πx i aleshores escrivim:

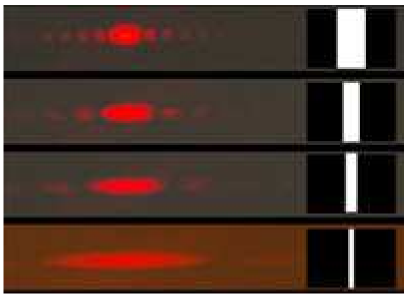
$$I = I_0 \,\mathrm{sinc}^2\,(yL/\lambda D)$$



Fixem-nos en què la condició que s'ha de verificar per a determinar la posició del primer mínim és la mateixa que en l'apartat 22.2

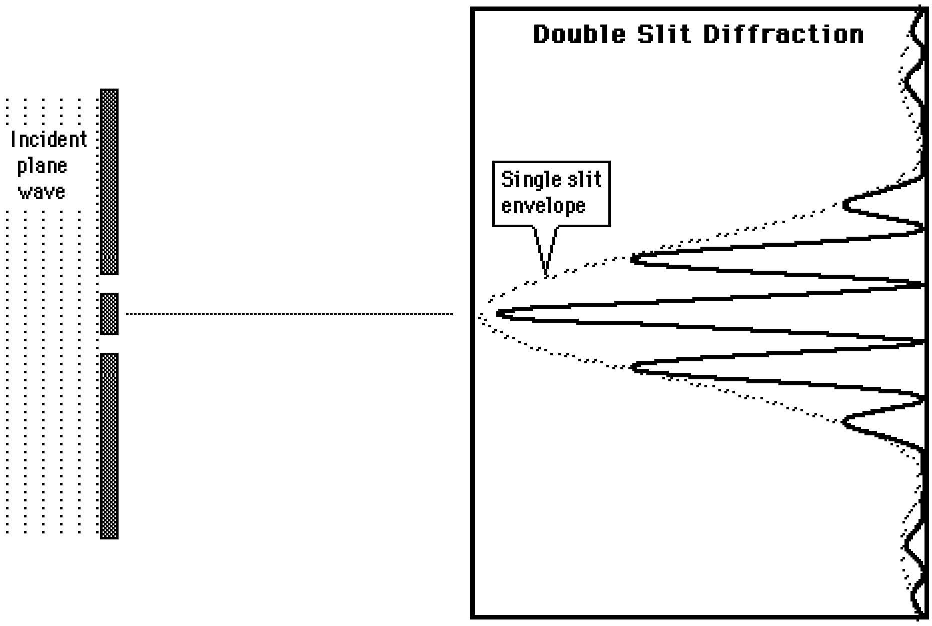
En les següents il·lustracions es pot veure l'efecte de canviar la grandària de l'escletxa:





27.4.2 Difracció de Fraunhofer d'una doble escletxa

En difracció de fraunhofer, el patró de difracció d'una doble escletxa correspon al patró d'interferència multiplicat pel patró de difracció d'una sola escletxa.



27.4.3 Xarxa de difracció

En el cas de la xarxa de difracció, pasa el mateix que en el cas de la doble escletxa, és a dir, obtenim el patró d’interferència degut a l’existència de n escletxes multiplicat per el patró de difracció corresponent a una escletxa: