

TEMA 26

Òptica Geomètrica

Principi de Fermat

Formació d'imatges en lents i miralls

Anàlisi i construcció dels instruments òptics

L'ull i els defectes de la visió

26.1 Validesa de l'Òptica Geomètrica

26.2. Principi de Fermat

26.2.1. Llei de la reflexió

26.2.2 Llei de Snell

26.2.3 Altres conseqüències del principi de Fermat

26.3 Formació d'imatges en lents. Òptica paraxial

26.3.1 Diferència de longituds entre la hipotenusa i el catet contigu d'un triangle rectangle amb un angle petit.

26.3.2 Distància focal d'una superfície esfèrica

26.3.3 Distància focal d'una lent prima

26.3.4 Formació d'imatge. Augment.

26.3.5. Sistemes òptics

26.4 Instruments òptics amb lents (Sistemes Diòptrics)

26.4.1 La lupa

26.4.2 Telescopi Astronòmic

26.4.3. Telescopi de Galileu

26.4.4 Microscopi

26.5. Miralls

26.5.1 Miralls concavus i convexos. Distància focal

26.5.2 Formació d'imatges

26.5.3 Instruments òptics amb miralls

- Sistemes Catòptrics (només miralls)
- Sistemes Catadiòptrics

26.6 L'ull humà. Visió i defectes de la visió

26.6.1 Parts de l'ull humà

26.6.2 Formació d'imatge sobre la retina. Acomodació

26.6.3 Defectes de la visió i la seva correcció

Efectes sobre la visió quan l'ull té un defecte o excés equivalent a una dioptria

26.6.4 Model numèric de l'ull humà

26***Òptica Geomètrica. Principi de Fermat. Formació d'imatges en lents i miralls. Anàlisi i construcció dels instruments òptics. L'ull i els defectes de la visió*****26.1 Validesa de l'Òptica Geomètrica**

De l'estudi de les equacions de Maxwell es dedueix que la llum és feta d'ones electromagnètiques. Per tant es propaga a l'espai com si fos una ona. A més, la mecànica quàntica estableix que la llum interacciona amb la matèria com si estes feta d'unes partícules anomenades fotons, que tenen una energia $E=h\nu$. L'espectre electromagnètic és molt ampli i abarca des de longituds d'ona extremadament llargues (de quilòmetres de longitud) fins a longituds d'ona extremadament curtes (de picòmetres en el cas dels raigs γ).

En la regió del visible, ens podem trobar en moltes situacions en les que les longituds d'ona són molt petites comparades amb les dimensions dels instruments que utilitzem per a fer-ne l'estudi; a més les energies associades als fotons poden ser molt petites comparades amb la sensibilitat dels instruments de mesura. En aquesta casos podem utilitzar el que anomenem "Òptica Geomètrica" per estudiar el comportament de la llum en determinades situacions.

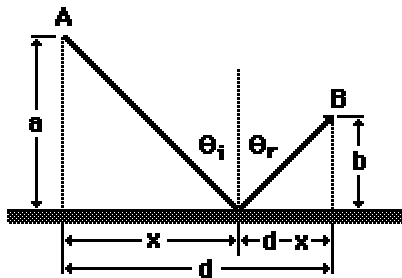
Si les longituds d'ona es tornen comparables amb les dimensions dels aparells d'estudi i les energies dels fotons són encara petites aleshores es pot utilitzar una altre aproximació que anomenem "Teoria clàssica de la radiació electromagnètica", que dóna lloc al que anomenem "Òptica Ondulatòria". Quan es treballa amb longituds d'ona molt curtes, aleshores a efectes pràctics els fotons es comporten com a partícules (el caràcter ondulatori és pràcticament negligible).

26.2. Principi de Fermat

El principi bàsic sobre el que es basa tota l'òptica geomètrica és el principi de Fermat. El principi de Fermat estableix que, d'entre tots els possibles camins que la llum podria seguir per a anar d'un camí a un altre correspon al camí per on triga menys temps. Anem a veure que d'aquest principi deduïm la llei de la reflexió en el miralls i la llei de Snell.

26.2.1. Llei de la reflexió

Utilitzant el principi de Fermat i suposant que la velocitat de la llum es constant en tot el trajecte deduïm que:



$$L = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \sin \theta_i - \sin \theta_r = 0$$

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r$$

26.2.2 Llei de Snell

Suposem ara dos medis on la velocitat de la llum és diferent. Suposem aleshores que en l'aire la velocitat és v i en un altre medi més dens la velocitat és $v' < v$. Deduïm aleshores que:

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v'}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{v'\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

$$0 = \frac{\sin \theta_1}{v} - \frac{\sin \theta_2}{v'}$$

Snell's Law $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$

On els índex de refracció n es defineixen com $n_1 = c/v_1$ i $n_2 = c/v_2$.

26.2.3 Altres conseqüències del principi de Fermat

Principi de reciprocitat: Si per anar de A fins a B hem trobat el camí de temps mínim, aleshores per anar de B fins a A, la llum seguirà el mateix camí. Això implica, per exemple, que si un raig de llum travessa un bloc de vidre de cares paral·leles, com els angles d'entrada i de sortida són iguals, el feix de sortida és paral·lel al feix d'entrada.

Posta de sol: Quan el sol està a punt de pondre's sobre l'horitzó, la posició real del Sol és per sota de l'horitzó. Això es degut a que la llum viatge més ràpidament en el buit que a dins de l'atmosfera.

Miratges: La llum viatge més ràpidament en l'aire calent prop de la superfície que en l'aire fred més lluny de la superfície.

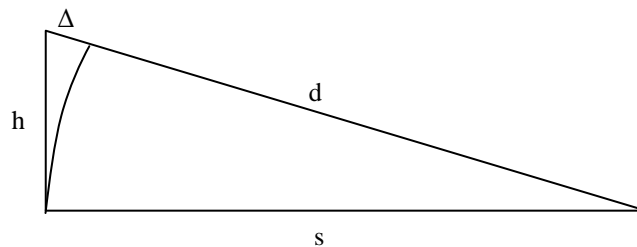
Mirall el·líptic: Focalitza tota la llum que surt d'un focus en l'altre focus, per què els punts d'una el·lipse verifiquen que la suma de les distàncies respecte de dos punts anomenats focus és constant.

Mirall Parabòlic: Focalitza la llum que ve de l'infinit en el focus de la paràbola. Una paràbola està constituïda per tots els punts equidistants a una recta i un punt anomenat focus.

26.3 Formació d'imatges en lents. Òptica paraxial

26.3.1 Diferència de longituds entre la hipotenusa i el catet contigu d'un triangle rectangle amb un angle petit.

Sigui d la longitud del catet contigu, h el catet oposat i s la hipotenusa. Volem saber que val $\Delta = s - d$.



Per a esbrinar-ho utilitzem el teorema de Pitàgores:

$$h^2 = d^2 - s^2$$

$$(d - s)(s + d) = h^2$$

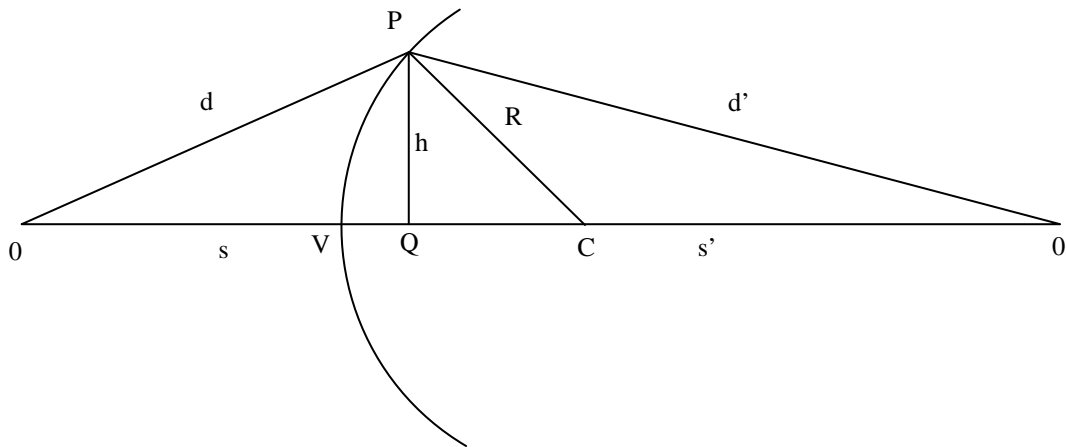
Com que Δ és un número petit, escrivim $s + d \simeq 2s$ i aleshores obtenim que

$$\Delta \cdot 2s = h^2$$

$$\Delta = \frac{h^2}{2s}$$

26.3.2 Distància focal d'una superfície esfèrica

Considerem un punt O front una superfície de vidre i volem que els raigs paraxials que surten de O focalitzin en un punt O' dins del vidre.



Volem que el vidre estigui corbat de tal manera que cada raig que surti de O i que entra per un punt P, es desvii cap al punt O'. Per a que això sigui cert cal que el temps que triga la llum en fer el camí OPO' sigui independent de P. La solució exacta correspon a una corba de quart grau difícil de fabricar. Habitualment es treballa amb superfícies esfèriques perquè són molt més fàcils de fabricar. Per tant suposarem doncs una superfície esfèrica i que només volem focalitzar raigs molt propers a l'eix òptic (raigs paraxials).

L'excés de camí òptic que es produeix en el camí superior volem compensar-lo amb el fet que el raig axial hagi de travessar un gruix de vidre superior $VQ = h^2/2R$, de manera que tots els camins òptics siguin iguals:

$$n \frac{h^2}{2s} + n' \frac{h^2}{2s'} = (n' - n) \frac{h^2}{2R}$$

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{(n' - n)}{R}$$

Si considerem aire i vidre, tindrem que:

$$\frac{1}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{(n' - 1)}{R}$$

Si considerem s a l'infinit (incidència amb raigs paral·lels) la llum focalitza a

$$f' = n' \frac{R}{n' - n}$$

si volem s' a l'infinit, aleshores obtenim:

$$f = n \frac{R}{n' - n}$$

Fixem-nos que si $s < f$ aleshores $s' < 0$, això vol dir que tenim una imatge virtual, és a dir, els raigs dins del vidre sembla que surten de O' .

Un altre cas interessant és considerar aire front una superfície plana d'aigua ($n = 4/3$), és a dir, radi de corbatura infinit. Aleshores tindrem:

$$\frac{1}{s} + \frac{n'}{s'} = 0$$

$$s' = -n's \quad s = -s'/n$$

Això vol dir que des de dins de l'aigua ens veuen més lluny del que estem i que des de fora veiem els objectes de dins de l'aigua més propers del que estan realment.

26.3.3 Distància focal d'una lent prima

Anem a considerar ara una lent amb cares esfèriques de diferent corbatura. Suposarem que les dues superfícies esfèriques són molt properes de manera que en puguem menysprear el gruix. Considerem aleshores un camí que passi per l'extrem de la lent i calculem la diferència de camí òptic. Suposarem tres índex de refracció diferents. Aleshores:

$$n_1 \frac{h^2}{2s} + n_3 \frac{h^2}{2s'} = (n_2 - n_1) \frac{h^2}{2R_1} - (n_2 - n_3) \frac{h^2}{2R_2}$$

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_3}{s'} = \frac{(n_2 - n_1)}{R_1} - \frac{(n_2 - n_3)}{R_2}$$

Anem a calcular les focals:

$$f = n_1 \frac{R_1 R_2}{n_2 (R_2 - R_1) + R_1 n_3 - R_2 n_1}$$

$$f' = n_3 \frac{R_1 R_2}{n_2 (R_2 - R_1) + R_1 n_3 - R_2 n_1}$$

Fixem-nos que si a les dues bandes tenim aire o dos materials iguals les focals són iguals i podem escriure:

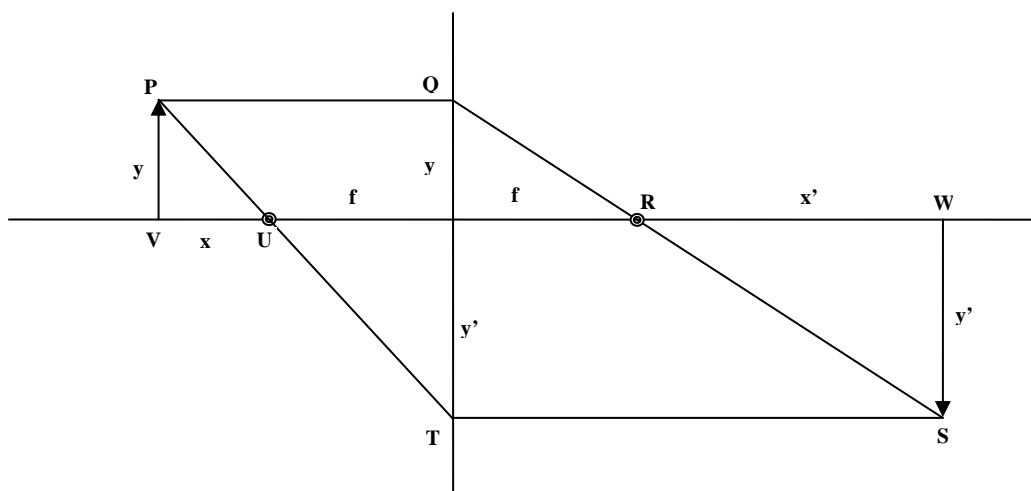
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

26.3.4 Formació d'imatge. Augment.

A la figura tenim representat un sistema format per una lent prima. Per a poder dur a terme el corresponent anàlisi, tindrem en compte els següents fets:

- Qualsevol raig que entra paral·lel a l'eix òptic, en travessar la lent es desvia de tal manera que passa pel focus.
- Qualsevol raig que prové del focus, en travessar la lent surt paral·lel a l'eix òptic.

Suposem que tenim un objecte a distància x del focus. Sigui y la seva alçada. Utilitzant els punts anteriors podem dibuixar el següent diagrama:



Volem calcular x' i y' . Fixem-nos en que:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f} \quad \frac{y}{x} = \frac{y'}{f}$$

Deduïm doncs que l'augment del sistema ve donat per:

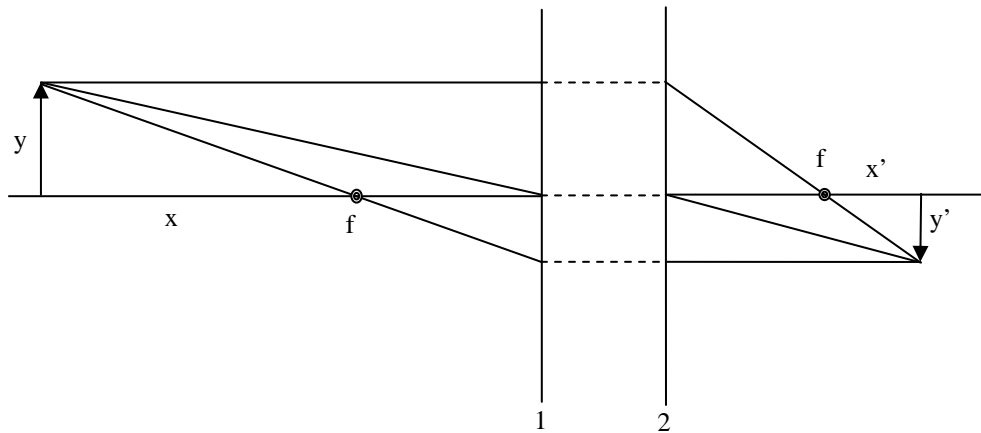
$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f} = \frac{f}{x}$$

A més a més deduïm una altra expressió que relaciona la posició de l'objecte i la imatge:

$$xx' = f^2$$

26.3.5. Sistemes òptics

Qualsevol sistema òptic amb un cert nombre de lents i miralls té la següent propietat: hi ha dos plans, anomenats plans principals, que tenen les següents propietats:



- Si un raig entra paral·lel a l'eix òptic pel primer pla principal, surt pel segon de manera que travessa el focus.
- Si un raig entra de tal manera que ha passat pel focus, surt pel segon pla principal paral·lel a l'eix òptic.

Les distàncies x i x' , y i y' es relacionen amb les equacions d'una lent prima:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f} = \frac{f}{x} \quad xx' = f^2$$

26.4 Instruments òptics amb lents (Sistemes Diòptrics)

26.4.1 La lupa

The magnification is

For small angles:

$$M_{\alpha} = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{h'}{25} = \frac{h'}{h} = \frac{25}{|o|}$$

$$\frac{25}{|o|} = \frac{25}{f} + \frac{25}{25}$$

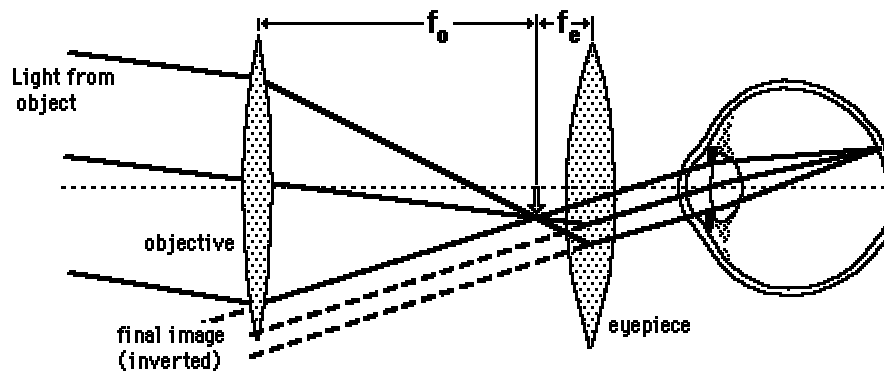
$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{25}{f} + 1$$

The magnification is $M_{\alpha} = \frac{25}{f} + 1$ for the close focus point, but since that causes eye strain it is usually desirable to put the image at infinity, giving $M_{\alpha} = \frac{25}{f}$

Veiem que una lupa el que fa es crear una imatge virtual augmentada de l'objecte a 25 cm de l'ull, encara que és més recomanable formar la imatge a l'infinit, tal i com s'indica a la figura.

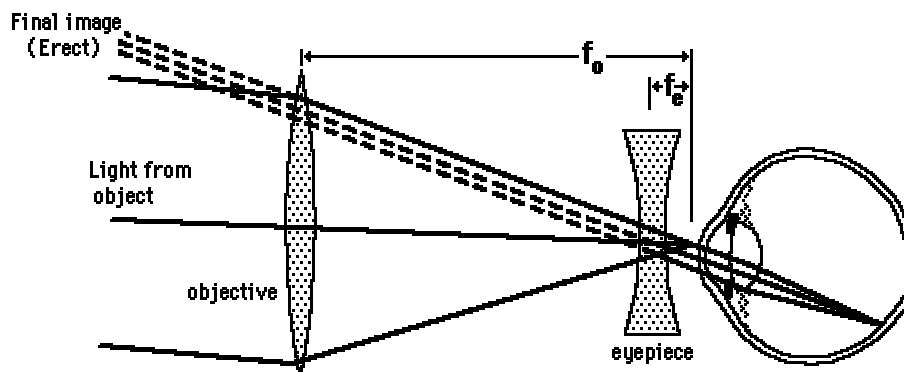
26.4.2 Telescopi Astronòmic

The astronomical telescope makes use of two positive lenses: the objective, which forms the image of a distant object at its focal length, and the eyepiece, which acts as a simple magnifier with which to view the image formed by the objective. Its length is equal to the sum of the focal lengths of the objective and eyepiece, and its angular magnification is $-f_o/f_e$, giving an inverted image.



26.4.3. Telescopi de Galileu

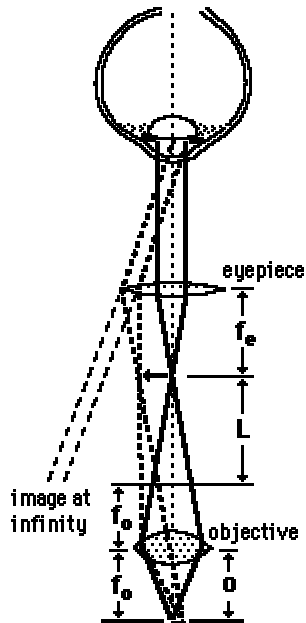
The Galilean or terrestrial telescope uses a positive objective and a negative eyepiece. It gives erect images and is shorter than the astronomical telescope with the same power. Its angular magnification is $-f_o/f_e$.



26.4.4 Microscopi

A compound microscope uses a very short focal length objective lens to form a greatly enlarged image. This image is then viewed with a short focal length eyepiece used as a simple magnifier. The image should be formed at infinity to minimize eyestrain.

The general assumption is that the length of the tube L is large compared to either $f(o)$ or $f(e)$ so that the following relationships hold



$$m_o = -\frac{L}{f_o}$$

Linear
Magnification
of objective

$$M_e = \frac{25}{f_e}$$

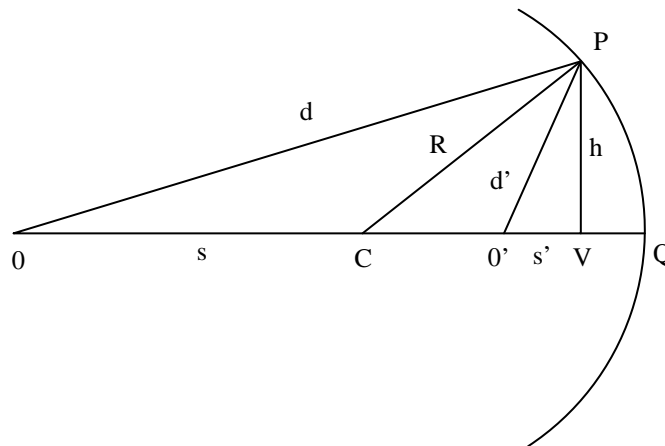
Angular
Magnification
of eyepiece

$$M = m_o M_e$$

Total
Magnification
of compound
microscope

26.5. Miralls**26.5.1 Miralls concavos i convexos. Distància focal**

El comportament del miralls es molt semblant al de les lents. De fet veure'm que les equacions són les mateixes si fem $n' = -1$ en les equacions d'una superfície esfèrica de vidre. Comencem suposant la següent geometria:



Aleshores s'haurà de verificar que el camí òptic per la part superior sigui igual al camí òptic per la part inferior:

$$d + d' = s + VQ + QV + s'$$

Fixem-nos en que $VQ + QV = 2h^2/2R$, per tant:

$$\frac{h^2}{2s} + \frac{h^2}{2s'} = \frac{h^2}{R}$$

Arreglant una mica l'expressió obtenim:

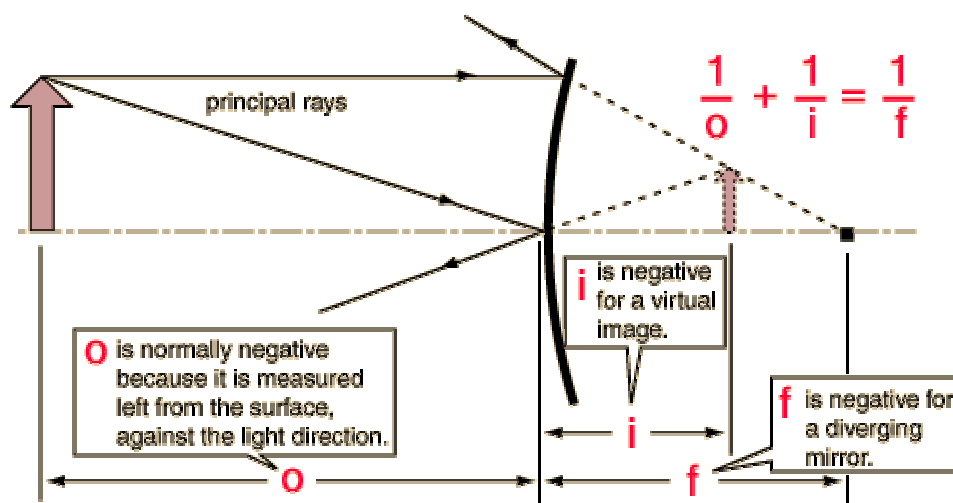
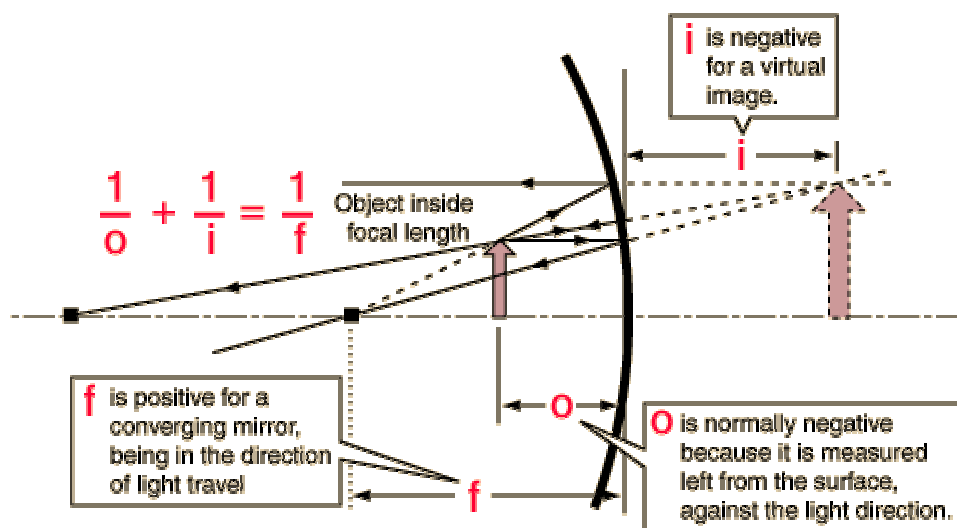
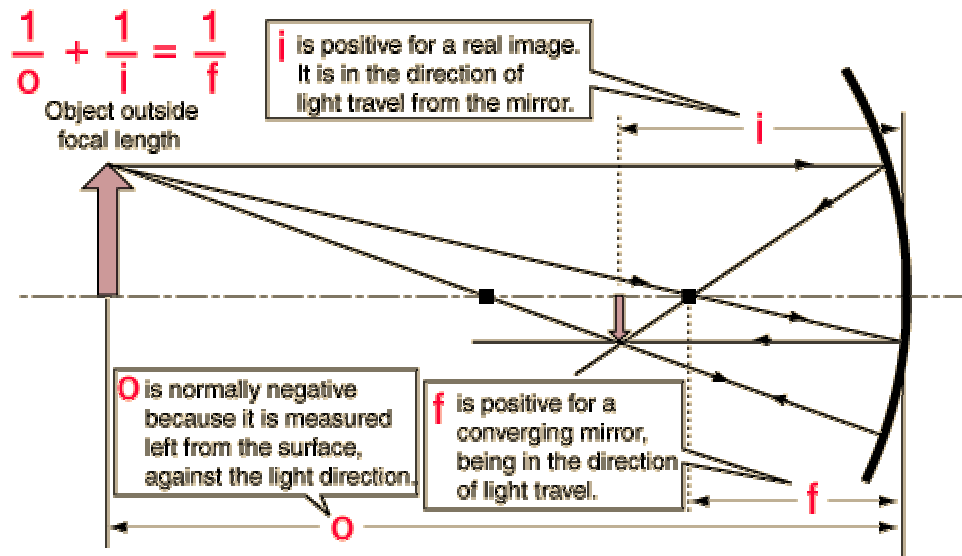
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

Deduïm immediatament:

$$f = \frac{R}{2}$$

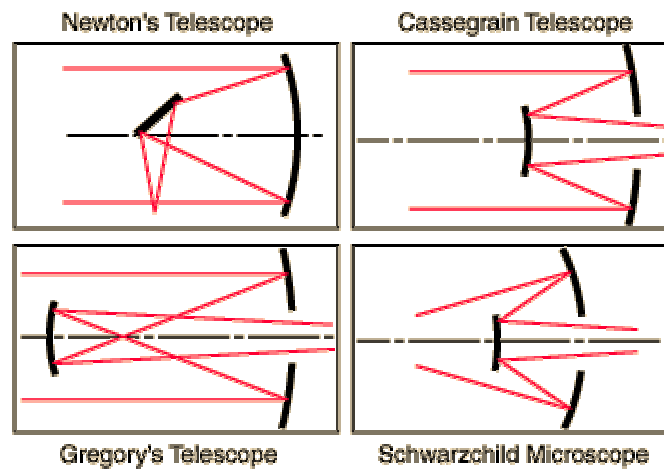
Fixem-nos que el nostre conveni de signes és agafar com a positives les direccions en que viatja la llum. Les imatges reals a l'esquerra del mirall corresponen a s' positiu. En cas d'una imatge virtual a la dreta del mirall obtindrem s' negatiu. La focal del sistema l'hem pres com a positiva per a un mirall còncau i per tant serà negativa per a un mirall convex.

26.5.2 Formació d'imatges

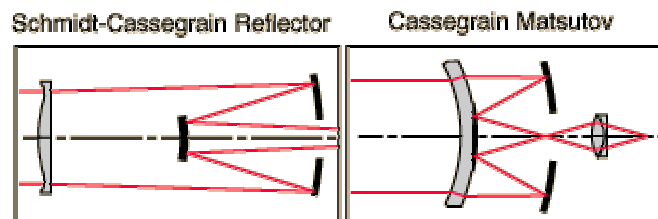


26.5.3 Instruments òptics amb miralls

Sistemes Catòptrics (només miralls)



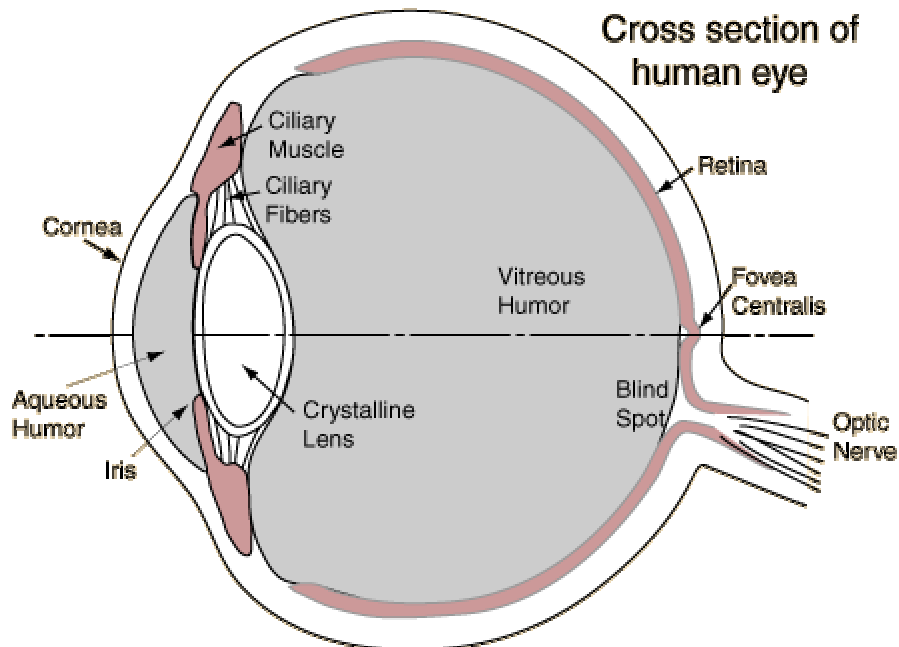
Sistemes Catadiòptrics



26.6 L'ull humà. Visió i defectes de la visió

26.6.1 Parts de l'ull humà

Les parts fonamentals de l'ull humà les podem veure en el següent diagrama:



The **cornea** represents the strongest part of the refracting power of the eye, providing about 80% of the power of the system. The index of refraction of the cornea is about 1.376. Rays pass from the cornea into the watery fluid known as the aqueous humor which has an index of refraction of about 1.336, so most of the refraction is at the cornea-air interface.

About 9mm in diameter and 4 mm thick, the **crystalline** lens provides perhaps 20% of the refracting power of the eye. Hecht likens it to a tiny transparent onion with some 22,000 fine layers. The index ranges from about 1.406 at the center to about 1.386 in outer layers, making it a gradient index lens. It is pliable, and changes shape to accomplish accommodation for close focusing.

The large chamber of the eye is filled with the gelatinous "**vitreous humor**", which has an index of refraction of about 1.337. The front chamber of the eye, immediately behind the cornea, is filled with the watery "aqueous humor" which has an index of refraction of about 1.336.

The **retina** is a light-sensitive layer at the back of the eye that covers about 65 percent of its interior surface. Photosensitive cells called rods and cones in the retina convert incident light energy into signals that are carried to the brain by the optic nerve. In the middle of the retina is a small dimple called the fovea or fovea centralis. It is the center of the eye's sharpest vision and the location of most color perception.

Though the eye receives data from a field of about 200 degrees, the acuity over most of that range is poor. To form high resolution images, the light must fall on the **fovea**, and

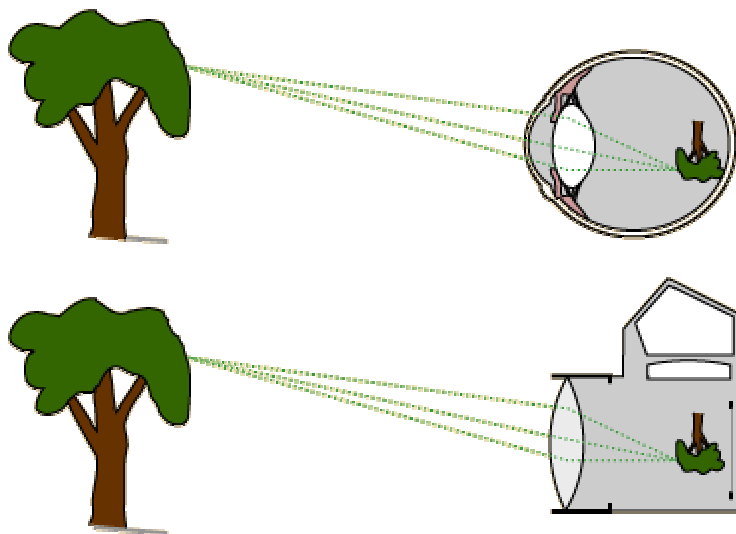
that limits the acute vision angle to about 15 degrees. In low light, this fovea constitutes a second blind spot since it is exclusively cones which have low light sensitivity. At night, to get most acute vision one must shift the vision slightly to one side, say 4 to 12 degrees so that the light falls on some rods.

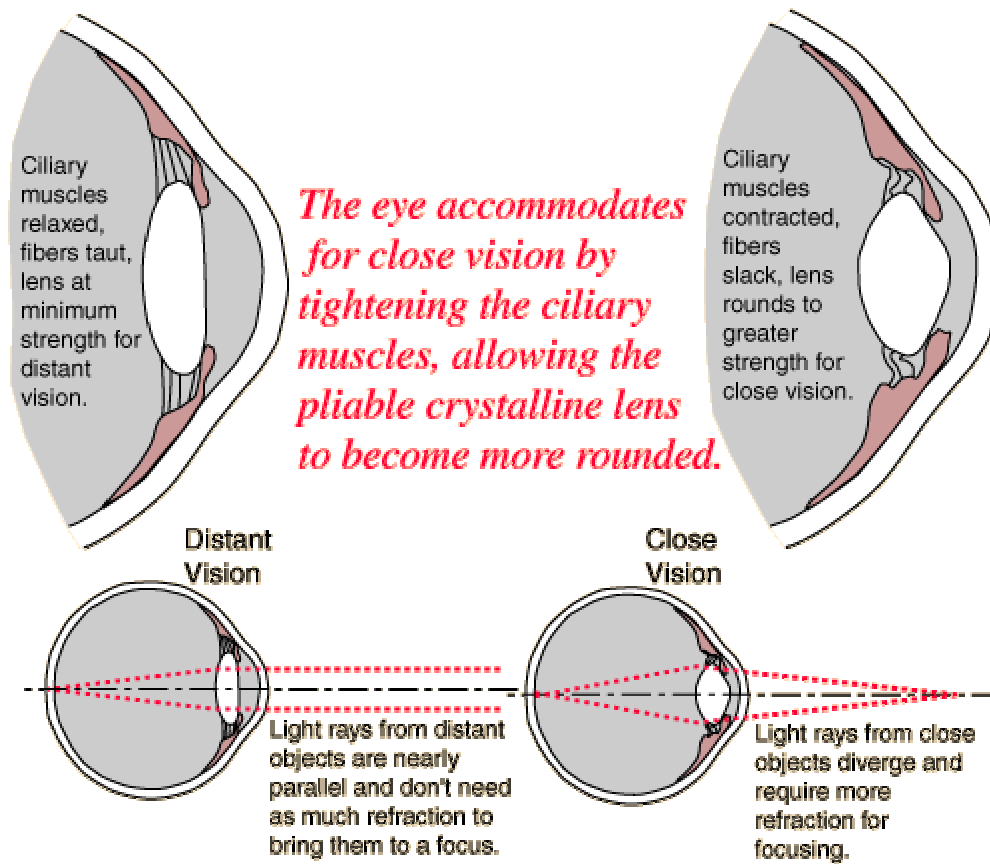
"Just about at the center of the retina is a small depression from 2.5 to 3 mm in diameter known as the yellow spot, or macula. There is a tiny rod-free region about 0.3mm in diameter at its center, the fovea centralis. (In comparison the image of the full Moon on the retina is about 0.2 mm in diameter.) *Here the cones are thinner* (with diameters of 0.0030mm to 0.0015mm) *and more densely packed than anywhere else in the retina.* Since the fovea provides the sharpest and most detailed information, the eyeball is continuously moving, so that light from the object of primary interest falls on this region. ...the rods are multiply connected to nerve fibers, and a single such fiber can be activated by any one of about a hundred rods. By contrast, *cones in the fovea are individually connected to nerve fibers.* The actual perception of a scene is constructed by the eye-brain system in a continuous analysis of the time-varying retinal image."(Hecht)

The **optic nerve** is the cable of nerve fibers with carries the electrical signals from the retina to the brain for processing. The point of departure of that optic nerve through the retina does not have any rods or cones, and thus produces a "**blind spot**".

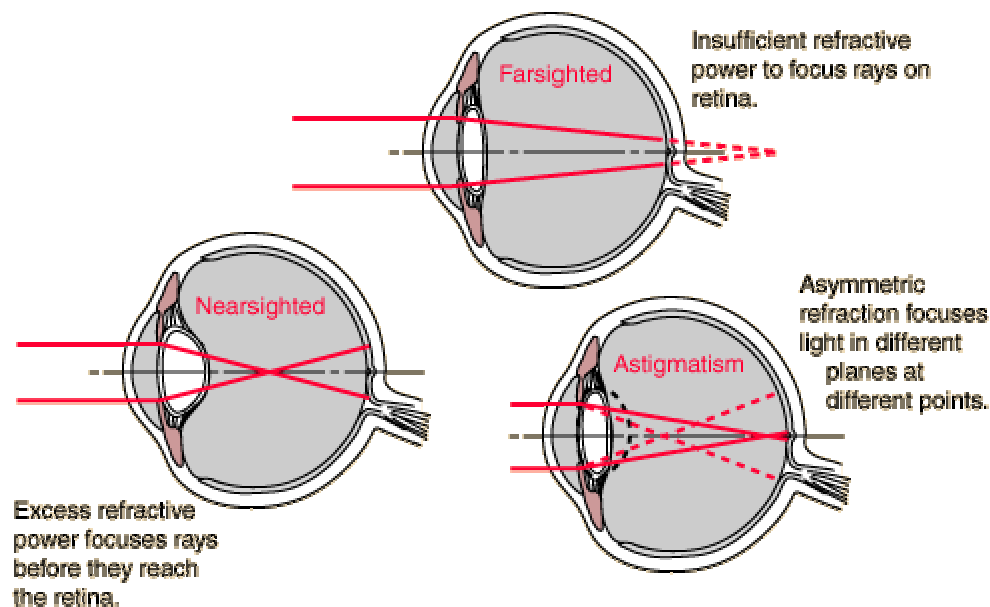
26.6.2 Formació d'imatge sobre la retina. Acomodació

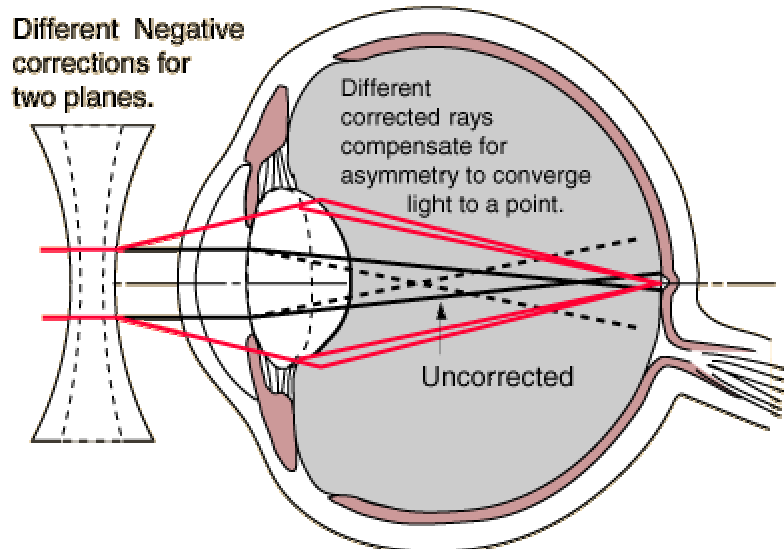
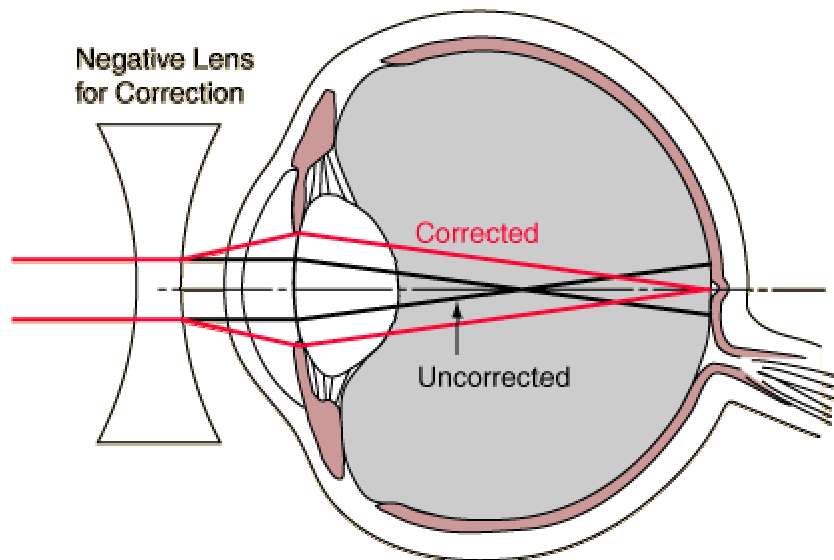
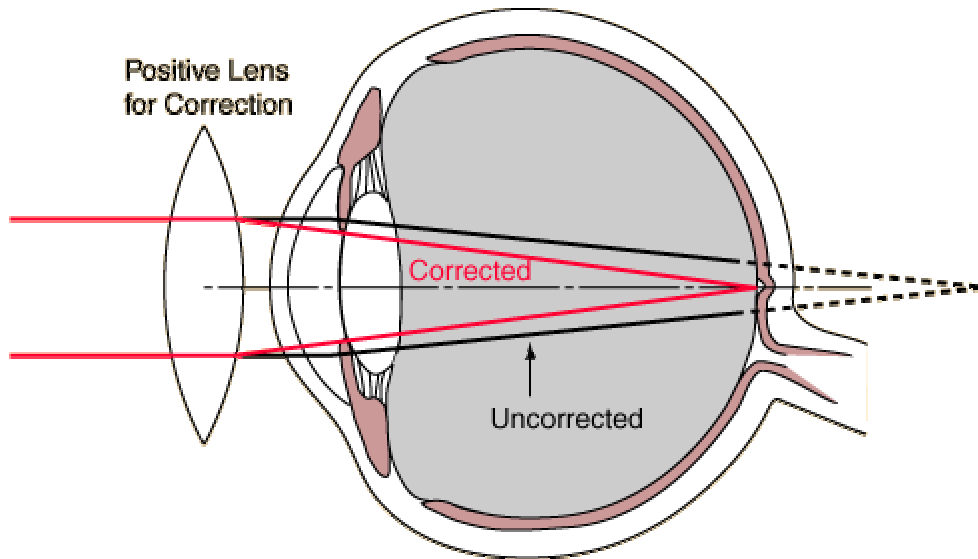
L'ull funciona de manera anàloga a com ho fa una càmera fotogràfica:



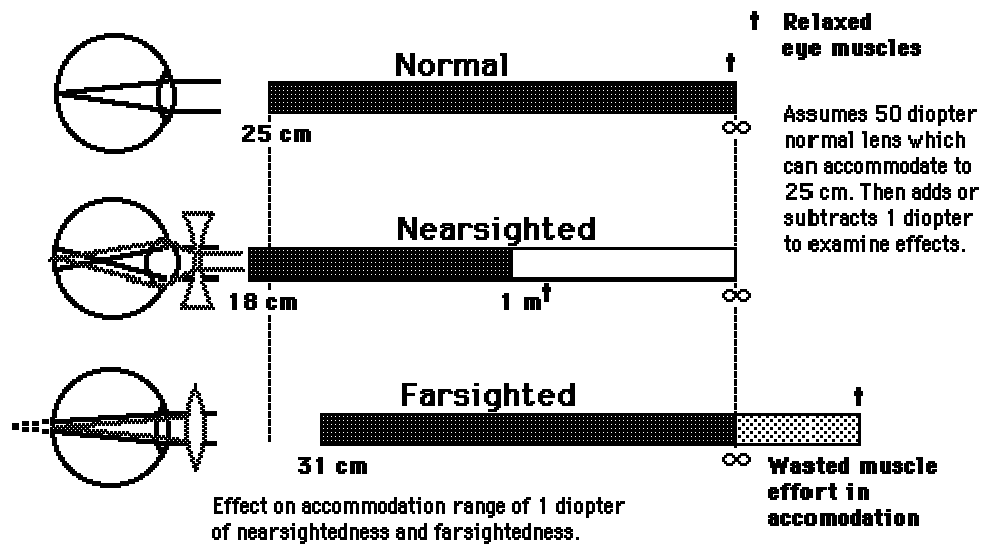


26.6.3 Defectes de la visió i la seva correcció





Efectes sobre la visió quan l'ull té un defecte o excés equivalent a una dioptria



26.6.4 Model numèric de l'ull humà

