TEMA 22

Camps elèctrics i magnètics depenents del temps

Equacions de Maxwell.

Inducció electromagnètica.

Inducció mútua

22

Camps elèctrics i magnètics depenents del temps. Equacions de Maxwell. Inducció electromagnètica. Inducció mútua

22.1 Introducció

Les equacions de Maxwell es poden escriure com un conjunt de quatre equacions diferencials:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

Les forces que actuen sobre una càrrega elèctrica q que es mou a velocitat **v** depenen dels valors del camp elèctric i del camp magnètic en el punt on es troba la càrrega. La força es pot escriure com:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

aquesta llei rep el nom de llei de Lorentz.

Les equacions de Maxwell contenen la llei de conservació de la càrrega elèctrica, Si sobre la quarta equació de Maxwell prenem la divergència obtenim:

$$0 = \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

doncs la divergència de la rotacional de qualsevol camp vectorial és zero. Utilitzant la primera equació de Maxwell obtenim:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

l'expressió que correspon a la conservació local de la càrrega elèctrica. Aquesta expressió ens diu que si considerem un diferencial de volum dV, la quantitat de càrrega que desapareix d'aquest volum per unitat de temps es deu a un flux equivalent de càrrega a través de la superfície del dV.

22.2 Equacions de Maxwell en termes del potencial elèctric i el potencial vectorial. Solucions de les equacions de Maxwell.

Per a poder escriure el camp elèctric i el camp magnètic en termes de la densitat de càrrega i del vector densitat de corrent el primer que farem és escriure les equacions de Maxwell d'una manera formalment més senzilla.

Comencem amb la tercera equació. El fet que la divergència del camp magnètic sigui sempre zero permet escriure el camp magnètic en termes de la rotacional d'un camp vectorial anomenat vector potencial **A** de la forma:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Sabem que aquesta solució no és única perquè si considerem $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ (on ψ és un camp escalar arbitrari) **A'** també verifica l'equació anterior.

Si considerem ara la segona equació de Maxwell i utilitzem $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, tot tenint en compte que podem invertit l'ordre de les derivades parcial, obtenim:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Com que la rotacional de $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A}/\partial t$ és zero això implica que ho podem escriure com el gradient d'un escalar que anomenem potencial elèctric:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

Fixem-nos que si res depengués del temps recuperem el cas electrostàtica en que el camp elèctric es pot escriure en termes del gradient del potencial elèctric. Escrivim doncs :

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Ja em solucionat dos equacions de Maxwell en termes de quatre funcions: una funció potencial elèctric i tres funcions corresponents a cada component espacial del potencial vectorial.

El que farem ara és utilitzar dues equacions de Maxwell que ens queden per a poder escriure les funcions potencial en termes de la densitat de corrent i la densitat de càrrega. Substituïm l'expressió del camp elèctric a la primera equació de Maxwell i obtenim:

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Finalment, substituint a la quarta equació de Maxwell obtindrem:

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

Utilitzant la identitat $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$ obtindrem:

$$c^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-c^2\nabla^2\mathbf{A}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi-\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

Com que tenim llibertat per a escollir la divergència de **A** podem simplificar aquesta expressió escrivint:

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Si ara escrivim les expressions pel potencial elèctric i el per al potencial vector obtenim dues equacions separades:

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}$$

Les solucions de les equacions anteriors es poden escriure com:

$$\phi(1,t)=\int\frac{\rho\left(2,t-r_{12}/c\right)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}dV_2$$

$$\mathbf{A}(1,t)=\int\frac{\mathbf{j}\left(2,t-r_{12}/c\right)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_{12}}dV_2$$

A partir dels potencials es pot aleshores calcular el camp elèctric i el camp magnètic:

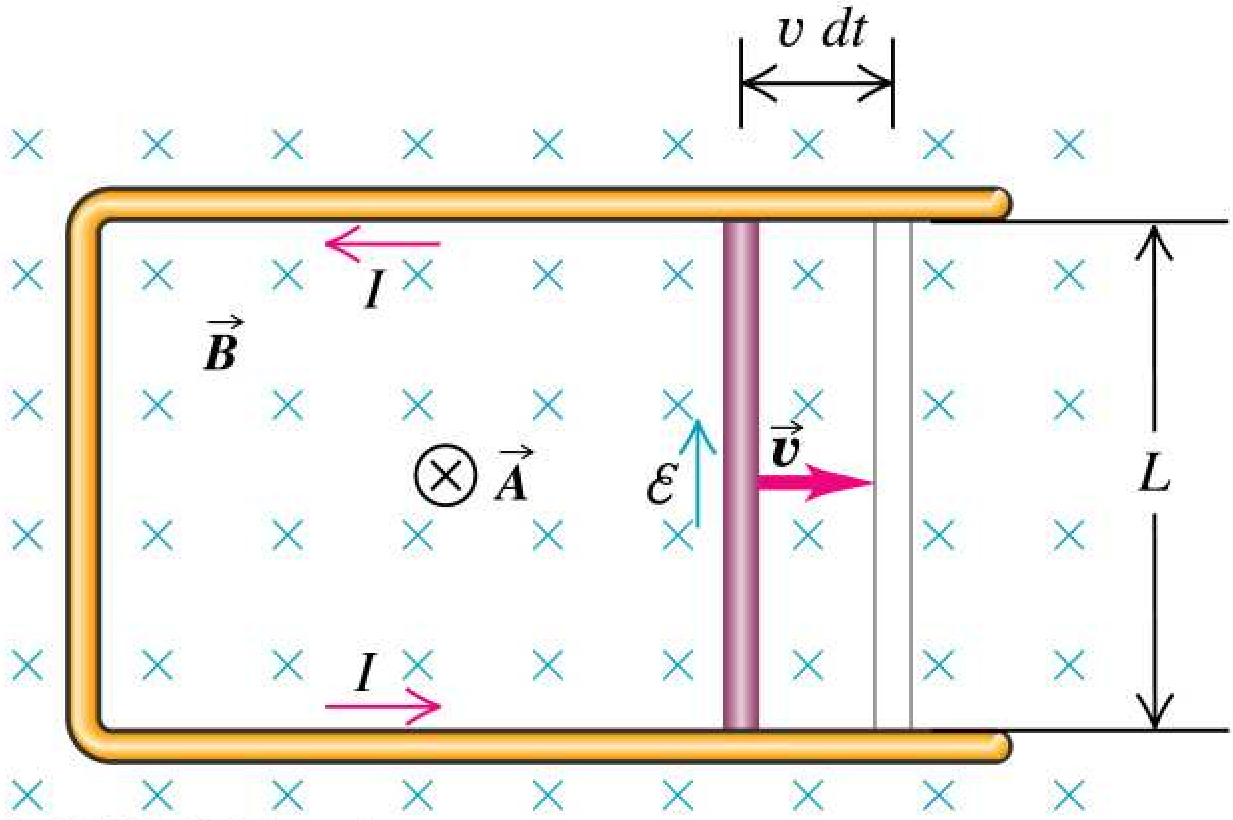
$$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

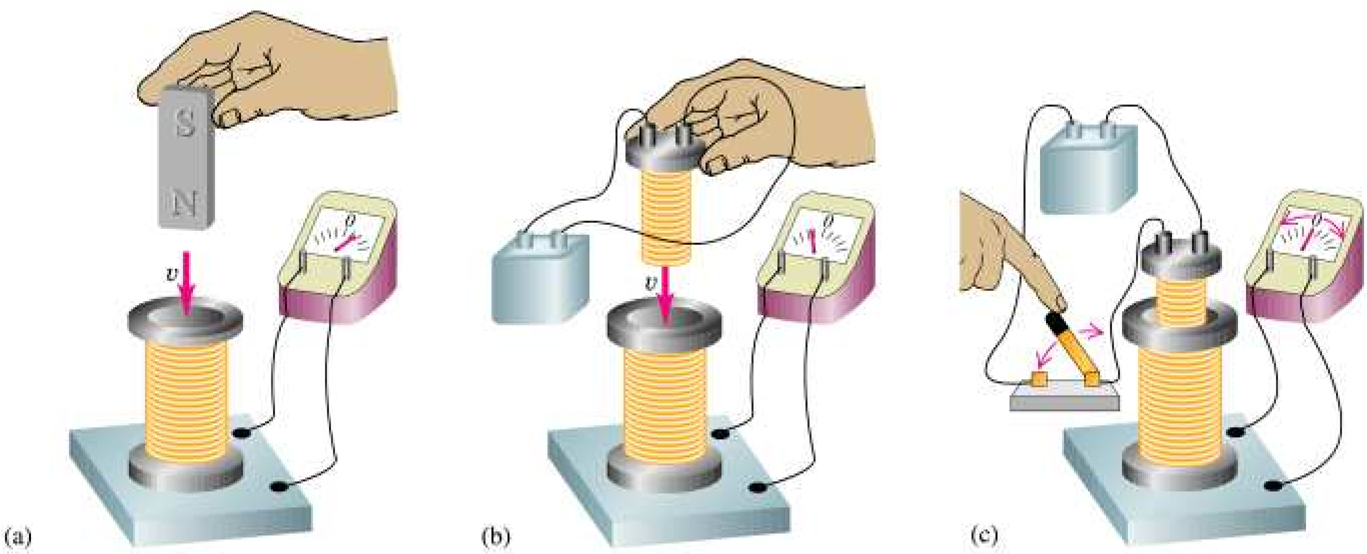
22.3 Física de la Inducció

L'any 1840, Faraday va descobrir que era possible obtenir voltatges de dues maneres diferents:

1. Movent el circuit en un camp magnètic



2. Variant el flux de camp magnètic que travessa el circuit.



Anem a veure com deduir aquests resultats a partir de les equacions de Maxwell i de la llei de Lorentz.

22.3.1 Inducció mitjançant la variació de flux magnètic que travessa un circuït

Considerem primer un circuit elèctric estacionari en el que es produeix una variació en el flux de camp magnètic que travessa aquest circuit. Considerem la segona equació de Maxwell i utilitzant el teorema de Stockes l'escrivim en forma integral:

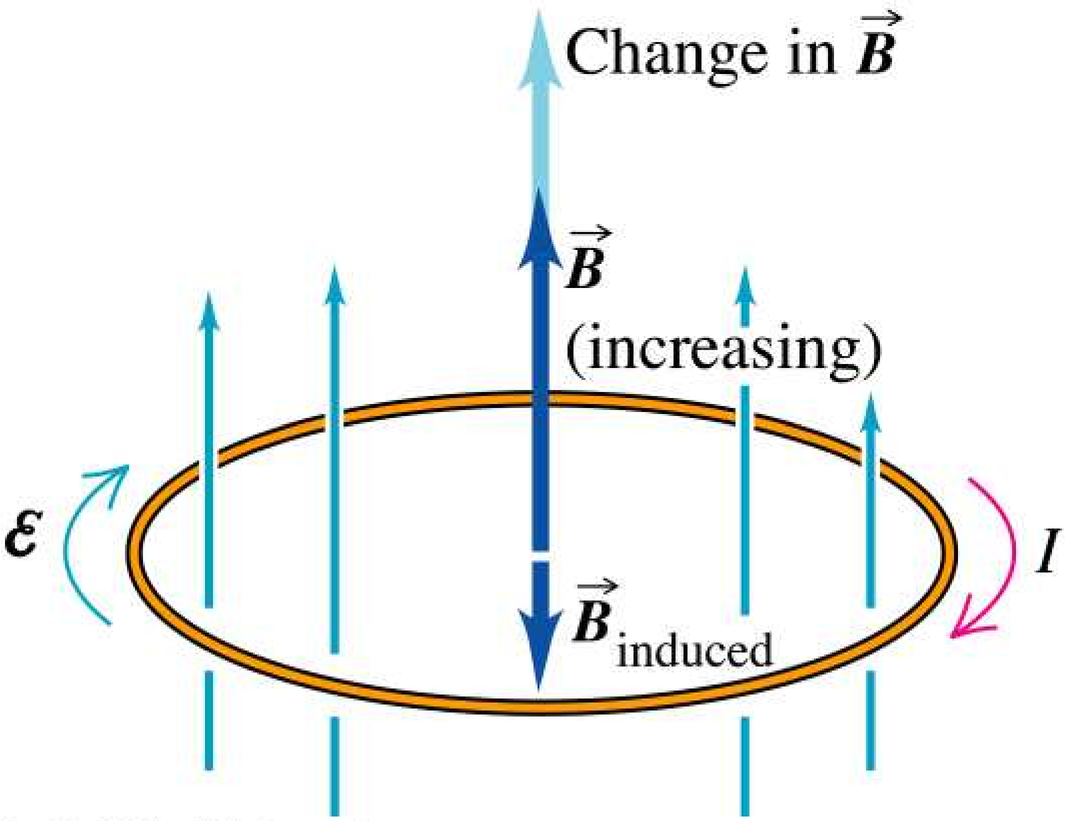
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathbf{n}da$$

on Γ es qualsevol corba tancada i S és qualsevol superfície delimitada per la corba. Queda clar que Γ és una corba fixa i S és una superfície fixa. En aquest cas podem escriure:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S} \mathbf{B}\cdot \mathbf{n}da = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Per tant escrivim la fem ε com:

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$



22.3.2 Inducció mitjançant el moviment del circuït en un camp magnètic

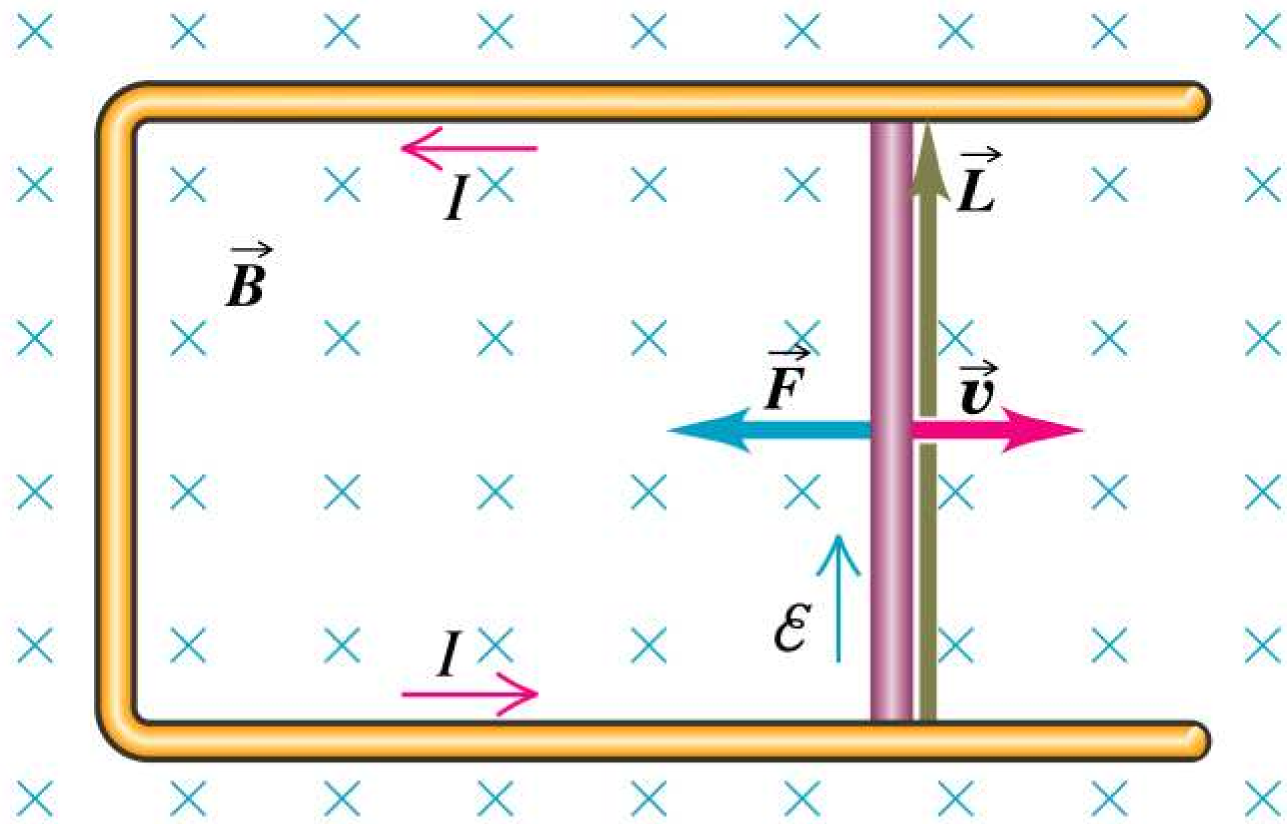
La força electromotriu és la força per unitat de càrrega integrada al llarg d'un circuit, i per tant és equivalent al treball total necessari per a transportar la unitat de càrrega al llarg del circuit.

Considerem un circuit en el que hi ha una part fixa en forma de U i una part mòbil en forma de barra que es desplaça a velocitat v. Suposem que el circuit es troba immers en un camp magnètic constant perpendicular al circuit. Aleshores sobre la barra actua una força vB sobre la unitat de càrrega. Si la barra té una longitud l aleshores:

$$\varepsilon = -wvB = -\frac{\partial(wLB)}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

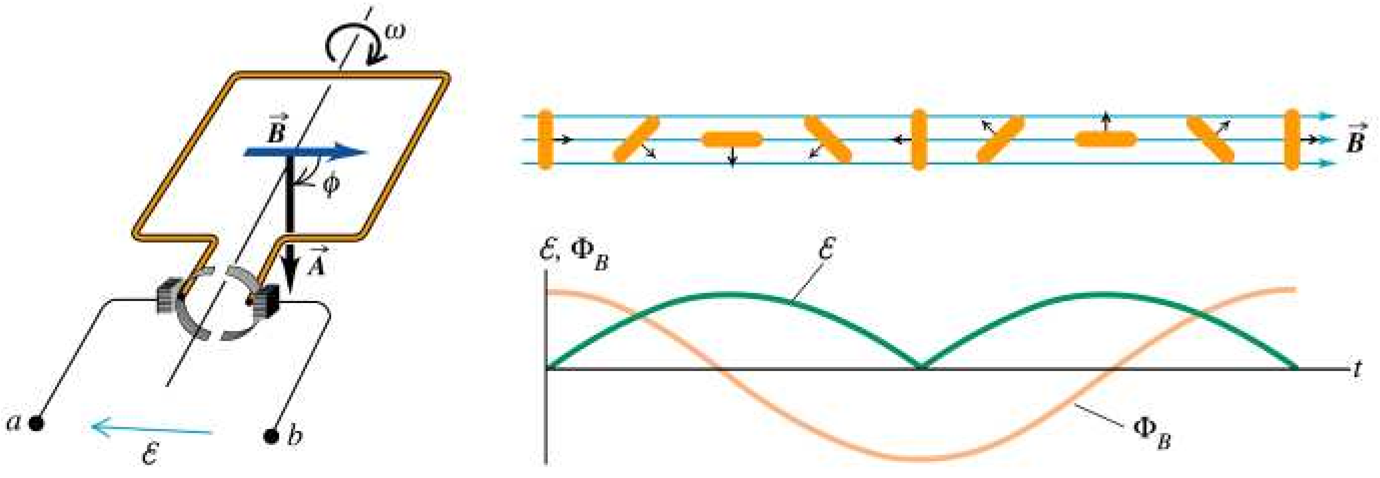
Per tant veiem que en aquest cas particular sembla aplicable la llei que em deduït directament de la segona equació de Maxwell. De fet es pot demostrar en general que quan un circuit té parts mòbils en un camp magnètic fix la fem es pot escriure com la derivada del flux, independentment de la forma del circuit.

Concloem doncs que la fem es pot calcular sempre a partir de la variació del flux de camp magnètic a través del circuit, independentment de si la variació es produeix pel moviment dels conductors o per la variació del camp magnètic o per tots dos motius alhora.



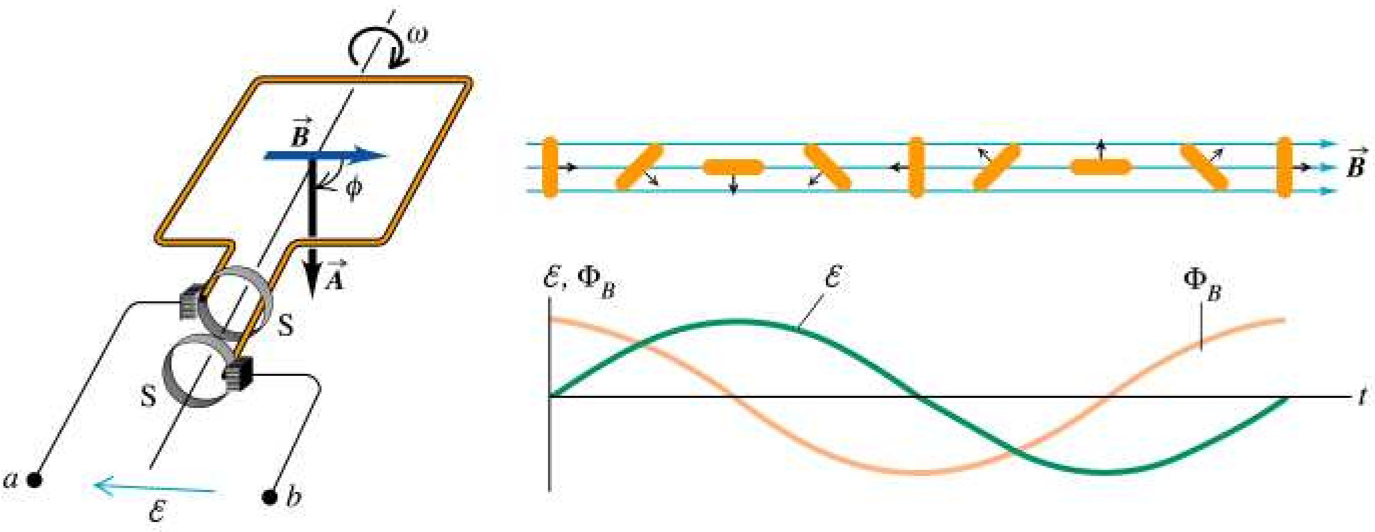
Els generadors de corrent continu i de corrent altern (dinamos i alternadors) es basen en aquest principis:

DINAMO



(a) (b)

ALTERNADOR:



(a) (b)

22.4 Inductància Mútua i Autoinductància

22.4.1 Inductància Mútua

Suposem dos solenoides 1 i 2 muntats un damunt de l'altre de longituds diferents L_1 i L_2 i amb un nombre d'espires diferent N_1 i N_2. Suposarem que la secció dels solenoides és S. Per tal de poder calcular la inducció d'una bobina sobre l'altre suposarem que els corrents no varien massa ràpidament amb el temps , de manera que el camp magnètic es pugui escriure mitjançant l'expressió corresponent a un corrent estacionari; el camp magnètic dins del solenoide 1 es podrà escriure doncs:

$$B = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{N_1 I_1}{L_1}$$

La força electromotriu que genera la variació d'aquest camp magnètic al solenoide 2 es podrà escriure com:

$$\varepsilon_2 = -N_2 S\frac{dB}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{N_1 N_2 S}{L_1}\frac{dI_1}{dt}$$

Veiem que la fem en el solenoide 2 és proporcional a la variació del corrent en el solenoide 1. Aquesta constant de proporcionalitat, que és bàsicament un factor geomètric, s'anomena inductància mútua i l'escriurem com M_{21} i per tant:

$$\varepsilon_2 = \mathrm{M}_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

Anem a demostrar ara que $M_{21} = M_{12}$.

Teorema de Neumann

Suposem que volem calcular la inductància mútua entre dos circuits arbitraris 1 i 2. la fem en el circuit 1 es pot escriure com:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d}{dt}\int_{(1)} \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}da$$

Si escrivim el camp magnètic en termes del vector potencial i fem ús del teorema de Stockes podem escriure:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d}{dt}\int_{(1)} (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}da = -\frac{d}{dt}\oint_{(1)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}_1$$

El vector potencial es pot escriure fàcilment en termes dels corrents elèctrics en el circuit 2:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{(2)} \frac{\mathbf{j}_2}{r_{12}}dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\oint_{(2)} \frac{I_2}{r_{12}}d\mathbf{s}_2$$

Substituint obtenim:

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\oint_{(1)}\oint_{(2)}\frac{d\mathbf{s}_2\cdot d\mathbf{s}_1}{r_{12}}\frac{dI_2}{dt}$$

Definint M_{12} com:

$$\mathrm{M}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\oint_{(1)}\oint_{(2)}\frac{d\mathbf{s}_2\cdot d\mathbf{s}_1}{r_{12}}$$

obtenim finalment:

$$\varepsilon_1 = -\mathrm{M}_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

i evidentment $M_{12}=M_{21}$

22.4.2 Autoinductància

Si considerem un únic solenoide en el que el corrent varia, també varia el propi flux de camp magnètic que crea el propi solenoide, i aquesta variació produirà el que anomenem una autoinductància o fem. Aquesta fem serà proporcional a la variació del corrent del propi solenoide:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

El signe menys significa que aquesta fem s'oposa al canvi de corrent

Podem calcular L fàcilment. El flux de camp magnètic en un solenoide es pot escriure com:

$$\phi = NBS = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{N^2 SI}{L}$$

per tant per a un solenoide:

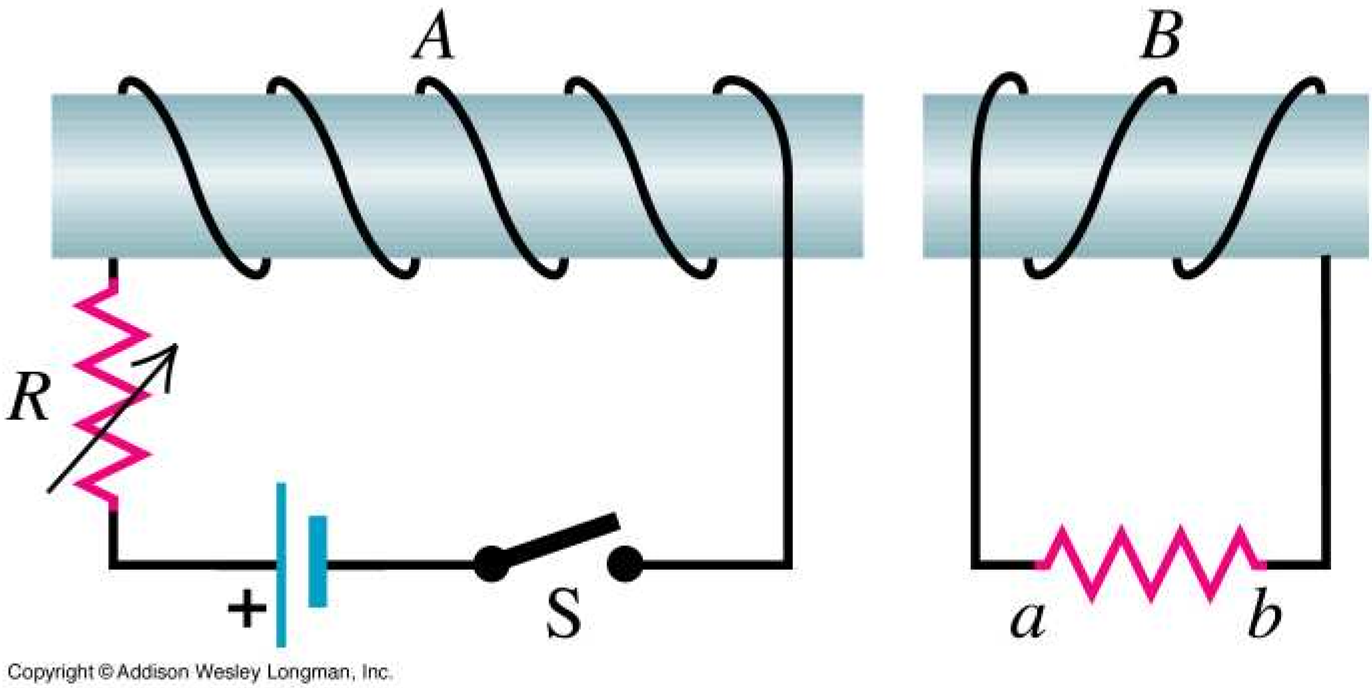
$$L = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{N^2 S}{L}$$

22.4.3 Circuits Acoblats

Si tenim dos circuits 1 i 2 en els que existeix una inductància mútua M tindrem que

$$\varepsilon_1 = -L_1\frac{dI_1}{dt} \pm M\frac{dI_2}{dt}$$
$$\varepsilon_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} \pm M\frac{dI_1}{dt}$$

El signe depèn de si la fem induïda està en la mateixa direcció o no que la intensitat de corrent que circula per cada circuit.



Podem calcula l'energia associada a aquests corrents. Comencem calculant la potència desenvolupada per les fems induïdes:

$$P = \varepsilon_1 I_1 + \varepsilon_2 I_2 = \left(-L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}\right) I_1 + \left(-L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}\right) I_2$$

$$P = -L_1 \frac{dI_1}{dt} I_1 - L_2 \frac{dI_2}{dt} I_2 - M \frac{d\left(I_1 I_2\right)}{dt}$$

L'energia emmagatzemada (que correspon al treball que nosaltres hem de fer contra la fem) serà doncs:

$$E = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

Aquesta expressió es pot transformar de la següent manera:

$$E = \frac{1}{2} L_1 \left(I_1 + \frac{\mathrm{M}}{L_1} I_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1^2}\right) I_2^2$$

Com per a qualsevol corrent l'energia ha de ser positiva, s'haurà de verificar:

$$L_1 L_2 > M^2 \qquad M < \sqrt{L_1 L_2}$$

Normalment s'escriu:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

on k s'anomena coeficient d'acoblament.

Si tenim dues inductàncies en sèrie entre les que existeix una certa inductància mútua M aleshores la inductància total s'haurà d'escriure com:

$$L_T = L_1 + L_2 \pm M$$