TEMA 21

Camp Magnètic.

Caràcter no conservatiu del camp magnètic.

Generació de camps magnètics i efectes sobre càrregues en moviment.

Aplicació a dispositius tecnològics

21

Camp Magnètic. Caràcter no conservatiu del camp magnètic. Generació de camps magnètics i efectes sobre càrregues en moviment. Aplicació a dispositius tecnològics

21.1 Introducció

La força sobre una càrrega elèctrica depèn no només del lloc on es troba, si no també de la seva velocitat. A cada punt de l'espai li associem dos vectors, que determinen la força sobre qualsevol càrrega. Primer hi ha la força elèctrica, que és independent del moviment de la càrrega. Després, hi ha una component addicional anomenada força magnètica, que depèn de la velocitat de la càrrega. Aquesta força magnètica té un caràcter direccional peculiar: la direcció de la força i la magnitud de la força depenen de la direcció en la que es mou la càrrega. La força magnètica sempre és perpendicular al vector velocitat. La força també es perpendicular a una direcció fixa a l'espai; i finalment la magnitud de la força és proporcional a la component de la velocitat perpendicular a aquesta direcció particular de l'espai. Resulta possible descriure aquest comportament definint el vector camp magnètic **B**, que especifica aquesta direcció particular de l'espai i la constant de proporcionalitat amb la velocitat, de manera que la força magnètica es pot escriure com: $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. La força electromagnètica total s'escriu com:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

Aquesta és l'anomenada Força de Lorentz. En el sistema internacional la unitat de camp magnètic és la Tesla.

21.1.1 Força Magnètica sobre un corrent elèctric

A partir de la llei de Lorentz podem calcular fàcilment la força que actua sobre un corrent elèctric quan aquest travessa un cert camp magnètic. El vector densitat de corrent es pot escriure com:

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$$

Com que ρ és la quantitat de càrrega per unitat de volum, podem escriure fàcilment la força sobre un volum ΔV d'un corrent elèctric com:

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{j}\times\mathbf{B}\Delta V$$

Si considerem un corrent uniforme sobre un cable de secció A podem escriure: $\mathbf{I} = A\mathbf{j}$. Si el corrent no és uniforme calculem I amb la corresponent integral. Aleshores escrivint V=AΔL:

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{I}\times\mathbf{B}\Delta L$$

Per tant la força per unitat de longitud és $\mathbf{I}\times\mathbf{B}$.

21.2 Determinació del camp magnètic. Llei d'Ampère

El vector camp magnètic es determina a partir de la densitat de càrrega ρ i el vector densitat de corrent **j** resolent les equacions de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

Si la densitat de càrrega ρ i el vector densitat de corrent **j** no depenen del temps aleshores obtenim dos conjunts d'equacions independents que constitueixen les lleis bàsiques de l'electrostàtica i de la magnetoestàtica:

Electrostàtica:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Magnetoestàtica:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

En aquest cas particular, en que res depèn del temps, el camp elèctric i el camp magnètic apareixen en dos conjunts separats d'equacions i per tant són independents l'un de l'altre.

21.2.1 Llei d'Ampère

Anem a utilitzar les lleis de la magnetoestàtica per a determinar el camp magnètic. La primera llei ens diu que no hi ha càrregues magnètiques i que per tant les línies de camp magnètic no tenen origen ni final. De fet, com veurem les línies de camp magnètic usualment giren al voltant de corrents elèctrics.

La segona llei ens relaciona el vector densitat de corrent i el camp magnètic. Utilitzant el teorema de Stockes podem escriure:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS$$

Per tant podem rescriure la segona llei com:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

La segona integral correspon a la intensitat de corrent que passa a través de la superfície S delimitada per la corba Γ.

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_{\Gamma}}{\varepsilon_0 c^2}$$

Aquesta llei rep el nom de llei d'Ampère i permet el càlcul de camps magnètics en algunes situacions en les que hi ha simetries simples.

Camp magnètic creat per un cable recte

Suposem un fil llarg, recte i de secció cilíndrica i que volem calcular el camp magnètic a prop del cable. Donada la simetria i sabent que les línies de camp no tenen ni origen ni final suposarem que giren al voltant del cable en cercles tancats. La llei d'Ampère ens diu aleshores que:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\varepsilon_0 c^2}$$

$$B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{2I}{r}$$

Em separat el factor $1/4\pi\varepsilon_0 c^2$ perquè és exactament 10^{-7}, degut a que una equació com aquesta és la utilitzada per a definir l'Ampère. A un metre d'un conductor per on circula un ampère el camp magnètic és $2 \cdot 10^{-7}$T.

En el Sistema Internacional es defineix l'ampere com el corrent constant que mantingut entre dos cables paral·lels de secció negligible i separats un metre entre si s'atreuen amb una força de $2 \cdot 10^{-7}$N/m. Anem a escriure l'expressió per la força en aquest experiment, que sabem que és F/L=I·B, per tant F/L=

$$F/L = I \cdot B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{2I^2}{r}$$

Si el corrent és d'un Ampère i la distància entre els conductors és d'un metre, aleshores:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} = 10^{-7}\, N \cdot A^{-2}$$

Camp magnètic creat per un solenoide

Quan un solenoide és molt llarg comparat amb el seu diàmetre, s'observa experimentalment que el camp magnètic fora del solenoide és molt petit en comparació al que hi ha a l'interior. Aleshores, les línies de camp a l'interior del solenoide podem suposar que són línies rectes. Agafant una corba Γ en forma de rectangle de longitud L i aplicant la llei d'Ampère trobem que:

$$BL = \frac{NI}{\varepsilon_0 c^2}$$

on N és el nombre d'espires dins del rectangle Γ. N/L = n correspondrà al nombre d'espires per unitat de longitud. Tindrem per tant, per al camp magnètic dins del solenoide:

$$B = \frac{nI}{\varepsilon_0 c^2}$$

21.3 Determinació del camp magnètic. El Vector Potencial. Llei de Biot i Savart

21.3.1 Definició del vector potencial

Anem a solucionar ara les lleis de la magnetoestàtica d'una forma general, és a dir, sense necessitat de simetries ni de deduccions intuïtives.

És conegut que la divergència de la rotacional d'un camp vectorial és sempre zero A partir de la primera equació deduïm que podem escriure el camp magnètic com el rotacional d'un cert camp vectorial **A** que anomenarem vector potencial**:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Fixem-nos que aquesta expressió implica que hi pot haver diferents vectors potencials que generin el mateix camp magnètic. Com que la rotacional del gradient d'una funció escalar és sempre zero sempre podem definir un nou vector potencial **A'** de la forma següent:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$$

A i **A**' generen el mateix camp magnètic **A**'. Com que hi ha molta llibertat en l'elecció del camp **A** convé escollir el vector potencial més senzill de calcular. Aleshores s'escull **A** de manera que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Fixem-nos que tenim llibertat per escollir la divergència del camp **A** perquè:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi$$

i escollint convenientment la funció ψ podem fer que $\nabla \cdot \mathbf{A}'$ sigui el que vulguem. Aviat veurem que aquesta és l'elecció més encertada.

21.3.2 Càlcul del vector potencial en termes de corrents coneguts.

Anem a escriure **A** en funció de **j.** Substituint l'expressió de **B** en funció de **A** a la segona llei de la magnetoestàtica tenim:

$$c^2\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

Aquesta expressió es pot transformar utilitzant:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$$

i l'igualtat $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ per a obtenir:

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0c^2}$$

Aquesta equació es fàcil de solucionar, doncs és absolutament anàloga a l'equació que relaciona el potencial elèctric amb la densitat de càrrega elèctrica. Per tant podem escriure directament:

$$\mathbf{A}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{\mathbf{j}(2)}{r_{12}}dV$$

21.3.3 Llei de Biot i Savart

Ara estem en condicions de poder trobar una expressió que permeti el càlcul directe del camp magnètic en funció dels corrents elèctrics.

Considerem:

$$\mathbf{B}(1)=\nabla\times\mathbf{A}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\left(\nabla_{(1)}\times\frac{\mathbf{j}(2)}{r_{12}}\right)dV$$

El càlcul és immediat i s'obté:

$$\mathbf{B}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{\mathbf{j}(2)\times\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}dV$$

Si considerem corrents en cables prims podem escriure:

$$\mathbf{B}(1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int I\frac{d\mathbf{s}_2\times\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}dV$$

Aquesta equació s'anomena llei de Biot i Savart, en honor als seus descobridors.

21.4. Efectes sobre càrregues en moviment. Aplicació a dispositius tecnològics

21.4.1 Càrrega elèctrica en un camp magnètic constant

En aquest cas, com que la força és perpendicular a la direcció del moviment, una possible trajectòria és una trajectòria circular. Considerem doncs primer el moviment sobre un pla perpendicular al camp magnètic; la força magnètica és perpendicular al moment de la càrrega, per tant $d\mathbf{p}/dt$ és perpendicular a **p** i pren el valor vp/R, on R és el radi del cercle:

$$\mathbf{F} = qv_{\perp}B = \frac{v_{\perp}p_{\perp}}{R}$$

Per tant el radi de la trajectòria:

$$R = \frac{p}{qB}$$

Si la càrrega té també una component del moviment paral·lel al camp magnètic $p_{\parallel}$, aquesta component es mantindrà constant. Per tant la trajectòria esdevé en aquest cas una espiral cilíndrica.

21.4.2 Espectròmetre de moments

Suposem que disparem partícules carregades perpendicularment a un cap magnètic i deixem que donin mitja volta. La coordenada x del punt d'impacte és proporcional al moment de les partícules. Un detector situat en un punt x detectarà només les partícules amb un interval de moments proper al moment $p = qBx/2$. Aquesta geometria té l'avantatge de que si les partícules amb el mateix moment surten amb una petita dispersió angular focalitzen en el mateix punt.

Variant el camp magnètic o movent el comptador o utilitzant un array de detectors és possible determinar l'espectre de moments del feix introduït a l'espectròmetre.

21.4.3 Betatró

En el betatró les partícules es poden accelerar en fer-les girar en un camp magnètic variable i amb simetria axial. El camp magnètic reté les partícules en trajectòries circulars i el camp elèctric les impulsa.

El camp elèctric es pot calcular a partir del camp magnètic mig en l'interior de la trajectòria de les càrregues:

$$2\pi r \cdot E = \frac{\partial}{\partial t}\left(B_{mig} \cdot \pi r^2\right)$$

Si suposem que la trajectòria correspon a un cercle de radi constant aleshores:

$$E = \frac{r}{2}\frac{\partial B_{mig}}{\partial t}$$

Les càrregues percebran la força qE i per tant acceleraran. Podrem escriure doncs:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{qr}{2}\frac{\partial B_{mig}}{\partial t} \qquad \Delta p = \frac{qr}{2}\Delta B_{mig}$$

Anem a veure ara quina condició haurà de complir el camp magnètic per a que les trajectòries puguin ser cercles de radi constant. La variació del moment transversal es pot escriure fàcilment en termes del camp magnètic a l'òrbita:

$$\frac{dp_t}{dt} = \frac{vp}{r} = qvB_{or} \qquad \Delta p = qr\Delta B_{or}$$

i per tant comparant les equacions deduïm que s'haurà de verificar que:

$$\Delta B_{mig} = 2\Delta B_{or}$$

Per tant, per a que un betatró operi correctament s'ha de verificar que el camp magnètic mig augmenti el doble del que augmenta el camp magnètic a l'òrbita. Aquesta condició es fa difícil d'acomplir quan s'intenta accelerar partícules a altes energies.

21.5 Parell Motor. Aparells de mesura. Motors elèctrics de CC

Considerem una espira a l'interior d'un camp magnètic. Si a l'espira i fem passar corrent, l'espira es veurà sotmesa a un parell motor degut a que sobre els conductors i actua la força de Lorentz.

Suposem una espira quadrada d'alçada a i base b atravessada per un eix paral·lel als costats de longitud a. Suposem un camp magnètic constant perpendicular a l'eix de gir de l'espira.

La força sobre els costats superior e inferior no produeix cap moment sobre l'espira. Sobre els costats dreta i esquerra i actuen forces perpendiculars al camp magnètic i a l'espira mòdul $F = aIB$. Per tant aquestes forces si que produeixen un moment que fa girar l'espira. El moment total es pot escriure com:

$$\tau = bF\sin\theta$$

on θ és l'angle entre un vector **n** normal amb l'espira i el camp magnètic. Utilitzant l'expressió de F arribem a

$$\tau = \mu B \sin\theta$$

on μ=abI és el producte de l'àrea de l'espira per la intensitat de corrent i s'anomena moment magnètic de l'espira. El moment magnètic és una magnitud vectorial que es pot definir com $\boldsymbol{\mu} = \mu\mathbf{n}$. Aquesta expressió del moment és certa en general encara que l'hàgim deduït per a una espira quadrada. Aquesta expressió ens diu que el moment intenta alinear el moment de l'espira en la mateixa direcció del camp magnètic. Utilitzant aquests principis bàsics es poden construir aparells de mesura i motors de corrent continu.

Multímetres Analògics

Aquesta és la base de tots els aparells de mesura analògics: voltímetres, amperímetres, etc, que consten d'espires que, al passar-hi un corrent, hi apareix un moment que les fa girar. Normalment, en aquests aparells, les espires giren sobre un eix que torsiona una molla circular. Això fa que les espires girin un angle proporcional (per angles petits) a la quantitat de corrent que hi circula, fent possible doncs la mesura del moment mitjançant una agulla que es mou davant d'una escala i que és solidària a l'eix de les espires. Aquest moment és proporcional a la magnitud elèctrica que correspongui en cada aparell.

Motors de Corrent Continu

En els motors cal aconseguir que l'espira faci un moviment de rotació continu. Per aconseguir-ho, cal invertir el sentit del corrent elèctric cada mitja volta de l'espira. Això es fa mitjançant el col·lector que fa contacte amb dues làmines metàl·liques fixes anomenades lamel·les.