TEMA 20

Corrent elèctric

Circuits de corrent continu.

Conservació de l'energia: Llei d'Ohm.

Utilització de Polímetres.

20

Corrent elèctric. Circuits de corrent continu. Conservació de l'energia: Llei d'Ohm. Utilització de Polímetres.

20.1 Corrent elèctric. Conservació de la càrrega

El corrent elèctric són electrons o altres càrregues en moviment i amb un desplaçament global o fluxe net. Podem representar el fluxe de les càrregues mitjançant un vector que ens indiqui la quantitat de càrrega que passa per unitat de superfície i per unitat de temps a través d'un element de superfície perpendicular al flux. En aquest vector l'anomenarem densitat de corrent i el representarem amb el vector **j.** Aquest vector indica la direcció del moviment de les càrregues.

Si considerem un àrea petita ΔS en un cert punt del material, aleshores la quantitat de càrregues que flueixen a través d'aquesta superfície en la unitat de temps és:

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\Delta S$$

on **n** és un vector perpendicular a ΔS.

La densitat de corrent està relacionada amb la velocitat del flux mig de les càrregues. Suposem que la velocitat mitjana de traslació les càrregues sigui **v**. Aleshores, si considerem una determinada superfície ΔS, la quantitat de càrrega que passa a través d'aquesta superfície en un cert interval de temps Δt es podrà escriure com la densitat de càrrega pel volum definit per un paral·lepípede de base la projecció de ΔS normal a la velocitat i alçada vΔt:

$$\Delta q = \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\Delta S\Delta t$$

i per tant el vector densitat de corrent es pot escriure com:

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$$

La càrrega total que travessa per unitat de temps qualsevol superfície S s'anomena intensitat de corrent I. Correspon a la integral de la component normal del flux a través de tots els elements de superfície.

$$I = \int_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}dS$$

La corrent I que surt d'una superfície tancada S representa la rapidesa amb que la càrrega abandona el volum V tancat per S.

Velocitat de flux mig de les càrregues

Anem a calcular quina és la velocitat del flux mig a la que es mouen les càrregues en conductor com ara el coure. En el coure n = $8{,}4\cdot10^{28}$ electrons/m^3, això implica que la velocitat a la que es mouen els electrons en un conductor amb una secció A=1mm^2 quan hi circula una intensitat de corrent de 1A és:

$$v=\frac{I}{Anq}=7{,}4\cdot10^{-5}\,m/s$$

que resulta ser una velocitat molt baixa, triguen 135 segons per rècorrer 1,0 cm.

Conservació de la càrrega

Una de les lleis bàsiques de la física és que la càrrega elèctrica és indestructible. Diem que la càrrega es conserva. Si hi ha un corrent sortint d'una superfície tancada vol dir que la quantitat de càrrega a l'interior ha de disminuir amb la quantitat corresponent. Podem escriure la llei de conservació de la càrrega com:

$$\int_{S\ \text{tancada}} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}dS=-\frac{d}{dt}Q_{\text{interior}}$$

La càrrega a l'interior es pot escriure com:

$$Q_{\text{interior}}=\int_{V\ \text{dins de S}}\rho dV$$

Si apliquem les dues equacions a un volum molt petit i utilitzem el teorema de Gauss per la primera integral podrem escriure:

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

20.2 Conductivitat elèctrica i Llei d'Ohm.

20.2.1 Llei d'Ohm

Un dels primers descobriments experimentals sobre corrents elèctrics és que en molts conductors (en particular els conductors metàl·lics) el corrent I és directament proporcional a la diferencia de potencial aplicada i escribim:

$$I=\frac{V}{R}$$

on R s'anomena resistència i es mesura en ohms (Ω). Experimentalment es demostra que la resistència depèn de la naturalesa del material, de la seva geometria i de la temperatura del material que es consideri. Experimentalment es troba que per conductors de geometria cilíndrica (com per exemple els cables elèctrics):

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

on el factor ρ s'anomena resistivitat i és característic del material, L és la longitud i A és la secció del conductor.

20.2.2 Efecte Joule. Conservació de l'energia

S'observa experimentalment que la conducció elèctrica implica l'escalfament del conductor (efecte Joule). La potència tèrmica alliberada es calcula fàcilment fent ús del principi de conservació de l'energia. Per a que passi corrent a través d'un conductor de resistència R és necessari aplicar una diferència de potencial V que produeix un corrent d'intensitat I que es pot calcular fent ús de la llei d'Ohm. El potencial V correspon al treball per unitat de càrrega proporcionat pel generador. Com que la intensitat de corrent correspon a la quantitat de càrrega per unitat de temps que travessa el generador tindrem que la potència proporcionada pel generador és:

$$P = IV = I^2 R$$

Aquesta quantitat d'energia per unitat de temps apareix en forma de potència calorífica en el material per on passa el corrent.

Anem ara a deduir quina relació s'estableix entre el camp elèctric i el vector densitat de corrent en els medis conductors on és vàlida la llei d'ohm. Podem escriure:

$$V = IR = I\rho \frac{L}{A} \qquad \frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A}$$

i per tant deduïm que:

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$$

normalment escrivim:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

on σ=1/ρ i s'anomena conductivitat. Observem doncs que el vector densitat de corrent és proporcional al camp elèctric. Aquesta expressió ens permet escriure fàcilment la quantitat de calor que s'allibera per unitat de temps i unitat de volum:

$$\frac{\Delta P}{\Delta V} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

20.2.3 Càlcul de resistències en conductors no cilíndrics

Imaginem per exemple que em de calcular la resistència al pas de corrent entre dos cilindres metàl·lics concèntrics entre els que s'estableix una certa diferència de potencial i que estan separats per un material amb una certa conductivitat σ.

En aquests casos haurem de seguir el següent procés:
a. Calcular el camp elèctric.
b. Determinar el vector densitat de corrent
c. Calcular la intensitat de corrent
d. Dividir diferència de potencial i intensitat

Anem a veure-ho:

a. Per a calcular el camp elèctric entre dos cilindres, simplement recordem que:

$$\Delta V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Tenint en compte la simetria del sistema, el camp electric serà radial i fent ús del teorema de Gauss podem escriure immediatament que:

$$E = \frac{k}{r}$$

Integrant podem escriure que:

$$\Delta V = k \ln b/a \qquad k = \frac{\Delta V}{\ln b/a}$$

i per tant el camp elèctric entre els cilindres es pot escriure com:

$$E = \frac{\Delta V}{\ln b/a} \cdot \frac{1}{r}$$

El vector densitat de corrent i la intensitat de corrent es poden escriure immediatament:

$$j = \sigma E = \frac{\Delta V \sigma}{\ln b/a} \cdot \frac{1}{r} \qquad I = j 2\pi r L = \frac{2\pi L \sigma}{\ln b/a} \Delta V$$

i per tant la resistència:

$$R = \frac{\ln b/a}{2\pi L \sigma}$$

20.2.4 Temps de distribució de la càrrega lliure en un material conductor

Una càrrega colocada en un punt interior d'un cos conductor desapareix d'aquest punt en un temps inversament prorcional a la conductivitat σ del material. La càrrega es mou cap a la superfície i es redistribueix de tal manera que produeix un camp nul dins del conductor. Anem a calcular el temps que triga a desaparèixer una càrrega a dins d'un conductor.

La llei de conservació de la càrrega ens diu que:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Utilitzant la llei d'Ohm $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ podem escriure:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

i utilitzant la llei de Gauss:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0$$

Per tant tenim una equació diferencial que ens diu com evoluciona qualsevol densitat de càrrega que pugui existir a dins d'un conductor. La solució és immediata:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-t/\tau\right)$$

on $\tau = \sigma/\varepsilon_0$ s'anomena temps de distribució de la càrrega lliure. Per al coure o la plata τ és aproximadament 10^{-19} segons, un temps extraordinàriament curt.

20.3 Conductivitat i models per a la conducció elèctrica

20.3.1 Un model per a la conducció elèctrica

La llei d'Ohm és vàlida per una gran varietat de substàncies i per un marge molt ampli d'intensitats de corrent. Anem a desenvolupar un model que justifiqui la validesa de la llei d'ohm en la majoria de substàncies.

Suposem una substància que conté N_1 portadors de càrrega per unitat de volum que transporten una càrrega q_1 positiva i que tenen una masa M_1 i N_2 portadors de càrrega per unitat de volum que transporten una càrrega negativa q_2 i que tenen una massa M_2. La densitat de corrent **j** estarà determinada per la velocitat mitjana de desplaçament dels portadors.

Sense camp exterior aplicat els portadors de càrrega estan en moviment tèrmic, és a dir, es mouen en direccions aleatòries a través de la substància amb una velocitat mitja nul·la, xocant entre ells cada cert temps i amb altres elements de la substància.

Resulta possible definir un temps mig entre colisions τ que depèn de les característiques del portador i de la substància en la que es troba. El promig instantani de les velocitats tèrmiques no és nul. Això dóna lloc a un corrent elèctric que fluctúa a l'atzar en absència de camp elèctric. Aquest corrent fluctuant és una font de soroll (diem de "soroll tèrmic" ò "soroll Johnson") en tots els circuits i limita la detecció de corrents elèctrics molt dèbils.

En primera aproximació, podem deduir la velocitat mitja de cada portador assumint que l'energia cinètica be donada per l'energia tèrmica mitjana:

$$U = \frac{3}{2}kT$$

on k=1,38·10^{-23}J/K és la constant de Boltzmann i T és la temperatura absoluta. Aquesta expressió és certa per les molècules d'un gas de partícules independents i constitueix una aproximació en un medi material. Pel cas dels electrons en un metall, a temperatura ambient s'obtenen velocitat tèrmiques de l'ordre de 10^{5}m/s. Utilitzant la mecànica quàntica, s'obté una velocitat superior: 1,57·10^6 m/s; aquesta velocitat es calcula a partir del valor de l'energia de fermi en cada metall. Per al coure E_F = 7eV.

Suposem ara que sobre el conductor hi apliquem un voltatge que donarà lloc a un camp elèctric E dins del conductor. Tots els portadors pateixen una certa acceleració (els positius en el mateix sentit del camp i els negatius en sentit contrari). L'acceleració es pot calcular mitjaçant la segona llei de Newton:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{F}{M_1} = \frac{eE}{M_1} \qquad \frac{dv_2}{dt} = \frac{F}{M_2} = \frac{eE}{M_2}$$

Integrant s'obté la velocitat:

$$v_1 = \frac{eE}{M_1}t \qquad v_2 = \frac{eE}{M_2}t$$

Aquestes equacions semblent indicar un moviment d'acceleració constant. La llei d'Ohm ens indica però que la velocitat de flux mig dels portadors és constant i proporcional al camp elèctric i que el valor de la velocitat és prou petit. Tenint en compte els xocs, arribarem a la llei d'Ohm. Les colisions dels portadors de càrrega té dues conseqüències: primer, la transferència d'energia guanyada pel portador durant el temps en què pot accelerar sota l'acció del camp elèctric, que suposa l'escalfament del medi conductor; i segon, que la velocitat després de cada colisió és aleatòria. Per tant, podem aleshores escriure la velocitat de flux mig dels portadors de càrrega en terms del temps mig entre col·lisions:

$$v_1 = \frac{eE}{M_1}\tau_1 \qquad v_2 = \frac{eE}{M_2}\tau_2$$

Fixem-nos que estem suposant que el temps mig entre colisions no es veu alterat per l'acció del camp elèctric. Això serà cert sempre que la velocitat de flux mig dels portadors sigui petita front al valor de la velocitat tèrmica dels portadors; si els portadors guanyessin molta velocitat aleshores seria d'esperar que el temps mig entre colisions disminuís. Sota aquesta hipòtesi, veiem que les velocitats dels portadors són proporcionals al camp elèctric aplicat. Finalment podrem escriure:

$$\mathbf{j} = N_1 q_1 v_1 + N_2 q_2 v_2 = \left(\frac{N_1 q_1^2}{M_1} \tau_1 + \frac{N_2 q_2^2}{M_2} \tau_2 \right) \mathbf{E}$$

per tant podem escriure la conductivitat en termes de paràmetres propis dels portadors de cada material:

$$\sigma = \left(\frac{N_1 q_1^2}{M_1} \tau_1 + \frac{N_2 q_2^2}{M_2} \tau_2 \right)$$

20.3.2 Model de gas d'electrons lliures pels metalls

Els metalls són sòlids policristal·lins constituits per cristalls de dimensions variables i orientació aleatòria. Això fa que des del punt de vista elèctric es comportin com un medi conductor isòtrop. Els àtoms que constitueixen els metalls tenen les seves capes externes molt incompletes. Els electrons de valència que formen la capa externa es troben a més molt dèbilment lligats als àtoms i a temperatura ambient es pot considerar que els electrons de valència són lliures i permeten la circulació de corrent elèctric. La densitat d'electrons de conducció és doncs molt elevada (per cada electró de valència $n=8{,}4\cdot 10^{28}$ electrons/m^3, aquest valor és pràcticament independent del metall) i pràcticament independent de la temperatura (excepte per temperatures extremadamant baixes).

En els metalls, el procés de conducció es pot considerar com l'arrossegament d'un núvol d'electrons lliures dins del material. Els electrons xoquen contra els ions de la xarxa. Aleshores la conductivitat d'un metall es pot escriure anàlogament com:

$$\sigma = \frac{n q^2 \tau}{m_e}$$

Resulta possible calcular τ a partir de l'expressió anterior i s'obté $\tau=2{,}4\cdot 10^{-14}$s per al coure. Això implica un recorregut mig dels electrons que correspon a uns cent radis atòmics. Aquest recorregut mig és molt llarg i no es pot deduir amb un model clàssic si no que cal utilitzar la mecànica quàntica.

20.3.3 Dependència de la conductivitat amb la temperatura

En els conductors metàl·lics la densitat d'electrons de conducció és esencialment independent de la temperatura i la resistència augmenta a l'augmentar la temperatura perquè els àtoms de la xarxa cristal·lina experimenten vibracions més amplies i per tant el temps mig entre col·lisions disminueix. La resistivitat es pot escriure de forma aproximada com:

$$\rho = \rho_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right]$$

on α s'anomena coeficient de temperatura i ρ_0 és la resistivitat a la temperatura T_0. Per al coure α=0,0039ºC^{-1} a temperatura ambient.

En els semiconductors purs, el temps mig entre col·lisions també disminueix, el nombre de portadors augmenta exponencialment amb la temperatura. Per tant el que s'observa és una disminució exponencial de la resistivitat amb la temperatura.

20.4 Resolució de circuits de corrent continu

20.4.1 Resistències en sèrie i en paral·lel

Per a les resistències en sèrie, la intensitat que passa per totes és la mateixa. La caiguda de tensió total ha de coincidir amb la suma de caigudes de tensió i per tant la resitència equivalent és la suma de les resitències.

Per a les resistències en paral·lel, la caiguda de tensió és la mateixa per a totes les resistències i la intensitat que travessa cada resistència ve donada per la llei d'Ohm que cal aplicar a cada resitència. Sumant totes les intensitats obtenim la intensitat total, i dividint caiguda de tensió i intensitat total trobem que l'invers de les resistència equivalent correspon a la suma dels inversos de totes les resistències.

20.4.2. Lleis de Kirchhoff

Moltes vegades la llei d'Ohm és insuficient per resoldre circuits elèctrics de certa complexitat. Les lleis de Kirchhof permeten resoldre qualsevol circuit.

En un circuit qualsevol distingim entre *nusos, branques i malles*:

- Un **nus** és el punt del circuit on es connecten tres o més conductors.
- Una **branca** és la part del circuit compresa entre dos nusos pròxims
- Una **malla** és qualsevol circuit de conductors tancat, que podem recorrer si partim d'un punt i tornem al mateix punt sense passar dos cops pel mateix lloc.

Les lleis de Kirchhoff ens permetran plantejar un sistema d'equacions per resoldre totes les incògnites del circuit (les intensitats que circula per cada branca). Les lleis ens poden proporcionar més equacions de les que necessitem:

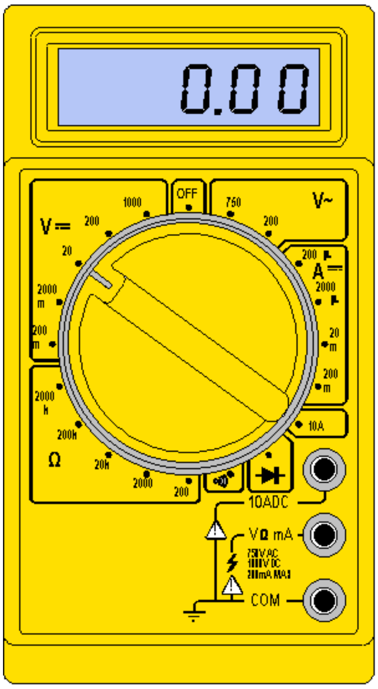
- De la conservació de la càrrega es dedueix la **Llei dels Nusos**. Diu que la suma de les intensitats que arriben a un nus és igual a la suma de les intensitats que surten del nus, o bé que la suma algebraica de les intensitats és igual a zero.

- De la conservació de l'energia es dedueix la **Llei de les Malles**. En una malla o circuit tancat la suma algebraica de les forces electromotrius dels generadors ha de ser igual a la suma algebraica de les caigudes de tensió.

Per a aplicar les lleis de Kirchhoff es convenient seguir uns certs convenis durant l'escriptura de totes les equacions:

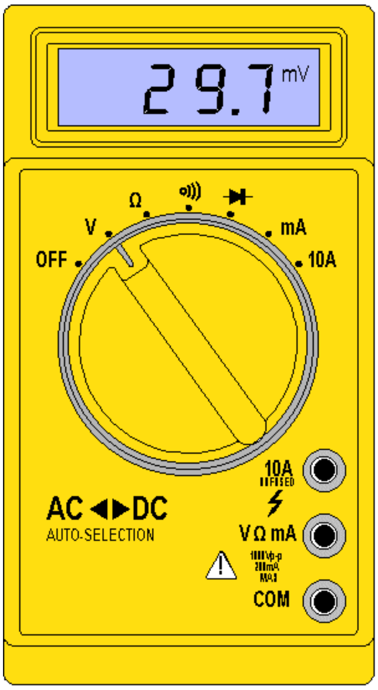
- En els nusos s'anomenen corrents positius els que entren i negatius als que surten
- En les malles, es pren com a positiu un cert sentit arbitrari. Aleshores, es prenen com a positives les intensitats que coincidexen amb aquest sentit i negatives les que van en sentit contrari.
- El signe de les forces electromotrius es considera positiu quan el generador crea corrent en la mateixa sentit que s'ha pres com a positiu i negatiu si és en sentit contrari.

20.5 Digital multimeters



Multimeters are designed and mass produced for electronics engineers. Digital meters give an output in numbers, usually on a liquid crystal display. The diagram below shows a **switched range multimeter**:

The central knob has lots of positions and you must choose which one is appropriate for the measurement you want to make. If the meter is switched to 20 V DC, for example, then 20 V is the maximum voltage which can be measured, This is sometimes called 20 V **fsd**, where fsd is short for **full scale deflection**.
For circuits with power supplies of up to 20 V, which includes all the circuits you are likely to build, the 20 V DC voltage range is the most useful. DC ranges are indicated by on the meter. Sometimes, you will want to measure smaller voltages, and in this case, the 2 V or 200 mV ranges are used.
What does DC mean? DC means **direct current**. In any circuit which operates from a steady voltage source, such as a battery, current flow is always in the same direction. Every constructional project described in Design Electronics works in this way.
AC means **alternating current**. In an electric lamp connected to the domestic mains electricity, current flows first one way, then the other. That is, the current reverses, or alternates, in direction. With UK mains, the current reverses 50 times per second.

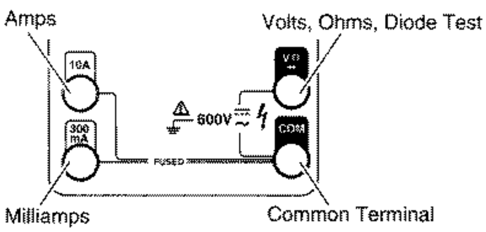


An alternative style of multimeter is the **autoranging multimeter**:

The central knob has fewer positions and all you need to do is to switch it to the quantity you want to measure. Once switched to V, the meter automatically adjusts its range to give a meaningful reading, and the display includes the unit of measurement, V or mV. This type of meter is more expensive, but obviously much easier to use.
Where are the two meter probes connected? The **black** lead is always connected into the socket marked COM, short for COMMON. The **red** lead is connected into the socket labelled VmA. The 10A socket is very rarely used.

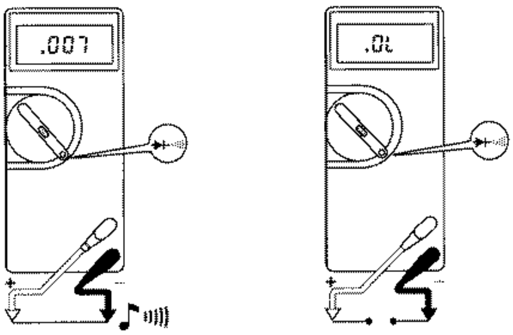
20.5.1 Using a digital multimeter

Input Jacks



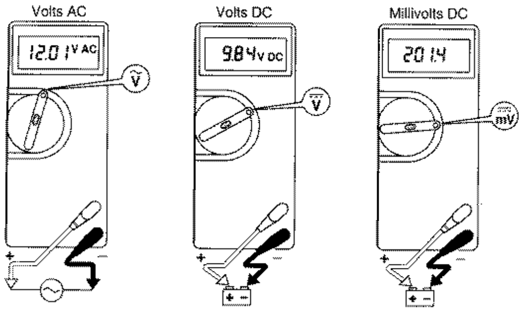
The black lead is always plugged into the common terminal. The red lead is plugged into the 10 A jack when measuring currents greater than 300 mA, the 300 mA jack when measuring currents less than 300 mA, and the remaining jack (V-ohms-diode) for all other measurements.

Continuity test

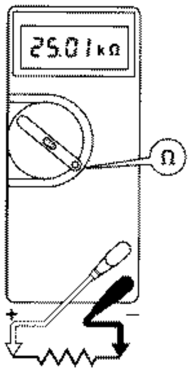


This mode is used to check if two points are electrically connected. It is often used to verify connectors. If continuity exists (resistance less than 210 ohms), the beeper sounds continuously. The meter beeps twice if it is in the Touch Hold mode.

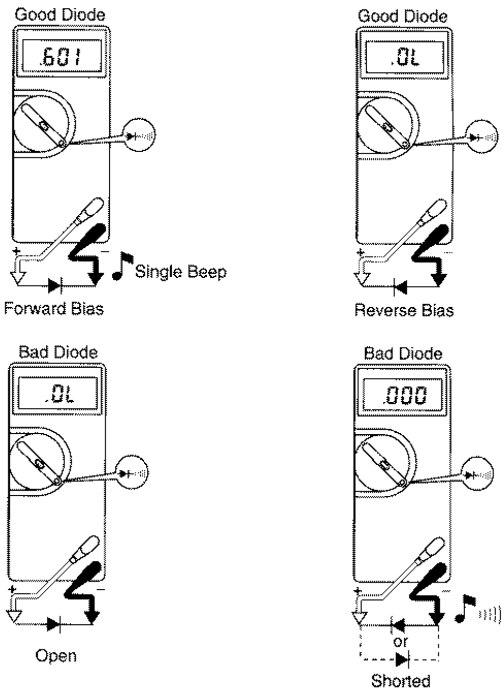
AC and DC Voltage



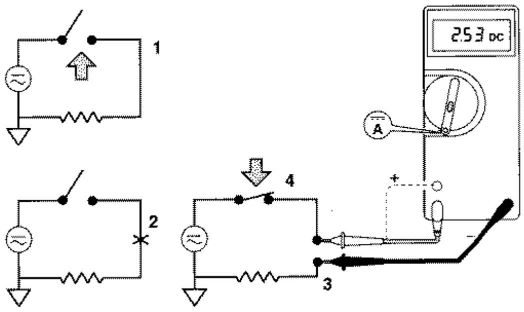
Resistance



Diodes

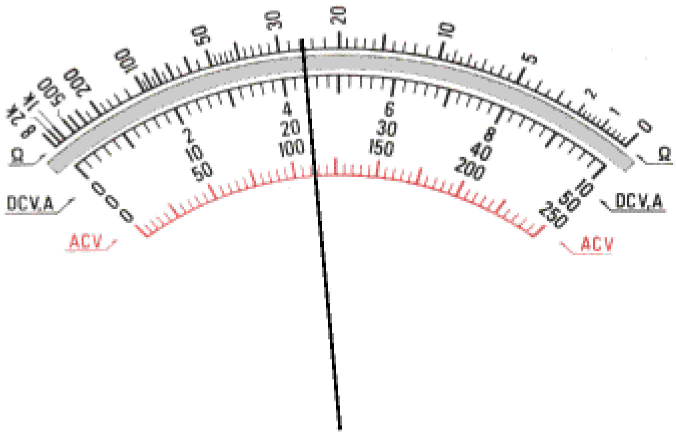


Current



Warning: To avoid injury, do not attempt a current measurement if the open circuit voltage is above the rated voltage of the meter.
To avoid blowing an input fuse, use the 10 A jack until you are sure that the current is less than 300 mA. Turn off power to the circuit. Break the circuit. (For circuits of more than 10 amps, use a current clamp.) Put the meter in series with the circuit as shown and turn power on.

20.6 Analogue multimeters



An analogue meter moves a needle along a scale. Switched range analogue multimeters are very cheap but are difficult for beginners to read accurately, especially on resistance scales. The meter movement is delicate and dropping the meter is likely to damage it! Each type of meter has its advantages. Used as a voltmeter, a digital meter is usually better because its resistance is much higher, 1 M or 10 M, compared to 200k for a analogue multimeter on a similar range. On the other hand, it is easier to follow a slowly changing voltage by watching the needle on an anlaogue display.

Typical ranges for analogue multimeters like the one illustrated: (the voltage and current values given are the maximum reading on each range) :

- DC Voltage: 0.5V, 2.5V, 10V, 50V, 250V, 1000V.
- AC Voltage: 10V, 50V, 250V, 1000V.
- DC Current: 50µA, 2.5mA, 25mA, 250mA.
  A high current range is often missing from this type of meter.
- AC Current: None. (You are unlikely to need to measure this).
- Resistance: 20Ω, 200Ω, 2kΩ, 20kΩ, 200kΩ. These resistance values are in the middle of the scale for each range.

20.6.1 Sensitivity of an analogue multimeter

Multimeters must have a high sensitivity of at least 20kΩ/V otherwise their resistance on DC voltage ranges may be too low to avoid upsetting the circuit under test and giving an incorrect reading. To obtain valid readings the meter resistance should be at least 10 times the circuit resistance (take this to be the highest resistor value near where the meter is connected).

You can increase the meter resistance by selecting a higher voltage range, but this may give a reading which is too small to read accurately!
On any DC voltage range:

Analogue Meter Resistance = Sensitivity × Max. reading of range

e.g. a meter with 20kΩV sensitivity on its 10V range has a resistance of 20kΩ/V × 10V = 200kΩ. By contrast, **digital multimeters** have a constant resistance of at least 1MΩ (often 10MΩ) on all their DC voltage ranges. This is more than enough for almost all circuits.

Used as an ammeter, an analogue multimeter has a very low resistance and is very sensitive, with scales down to 50 µA. More expensive digital multimeters can equal or better this performance.

Most modern multimeters are digital and traditional analogue types are destined to become obsolete.