TEMA 19

Naturalesa elèctrica de la matèria.

Electrostàtica.

Discontinuïtat i conservació de la càrrega.

Caràcter conservatiu del camp electrostàtic.

Estudi energètic de la interacció elèctrica.

19

Naturalesa elèctrica de la matèria. Electrostàtica. Discontinuïtat i conservació de la càrrega. Caràcter conservatiu del camp electrostàtic. Estudi energètic de la interacció elèctrica.

19.1 Naturalesa elèctrica de la matèria. Discontinuïtat de la càrrega

Tota la matèria coneguda resulta de la combinació d'una sèrie d'elements químics que conformen la taula periòdica. Cada element químic s'identifica amb un número que indica el nombre de protons presents en el nucli i el corresponent nombre d'electrons.

Entre protons i entre els electrons existeixen forces de repulsió, però en canvi entre electrons i protons existeixen forces d'atracció. Aquestes forces, que són bilions de vegades més intenses que les forces gravitatòries que s'estableixen entre aquestes partícules són les anomenades forces elèctriques. Degut a aquest caràcter dual de la força elèctrica, s'assigna arbitràriament càrrega positiva als protons i càrrega negativa als electrons i diem que càrregues del mateix signe es repel·len i càrregues de signe contrari s'atrauen.

S'observa experimentalment que les càrregues del protons i dels electrons són idèntiques però de signe contrari, és a dir, que la força de repulsió entre dos protons separats a una certa distància d és la mateixa que entre dos electrons separats a la mateixa distància. La càrrega d'un protó q = $1{,}609\cdot 10^{-19}$ C on C indica Coulomb, la unitat de càrrega elèctrica en el Sistema Internacional. No s'ha observat mai cap càrrega elèctrica transportada en alguna partícula, ió, etc, que no fos un múltiple de q, tot i que se sospita que les partícules que conformen els protons, els anomenats quarks, tenen càrregues elèctriques fraccionàries.

19.2 Electrostàtica

19.2.1 Equacions de Maxwell

L'electrostàtica es pot entendre com un cas particular d'aplicació de les equacions de Maxwell quan no hi ha variació de cap magnitud amb el temps (cas estàtic). Les equacions de Maxwell es poden escriure com un conjunt de quatre equacions diferencials:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$
$$c^2\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

Les forces que actuen sobre una càrrega elèctrica q que es mou a velocitat **v** depenen dels valors del camp elèctric i del camp magnètic en el punt on es troba la càrrega. La força es pot escriure com:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

aquesta llei rep el nom de llei de Lorentz. Si la densitat de càrrega ρ i el vector densitat de corrent **j** no depenen del temps aleshores obtenim dos conjunts d'equacions independents que constitueixen les lleis bàsiques de l'electrostàtica i de la magnetoestàtica:

Electrostàtica:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Magnetoestàtica:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

En aquest cas particular, en que res depèn del temps, el camp elèctric i el camp magnètic apareixen en dos conjunts separats d'equacions i per tant són independents l'un de l'altre.

19.2.2 Llei de Coulomb. Principi de Superposició

A partir de la primera equació de Maxwell és possible deduir el camp elèctric produït per una única càrrega elèctrica puntual i per tant podem establir la llei de Coulomb. Utilitzant el teorema de Gauss, podem escriure:

$$\left.\begin{array}{c} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da \\ \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{q}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

on V és un volum delimitat per una superfície S i q és la càrrega continguda a dins de V. El teorema de Gauss ens diu que el flux de camp elèctric a través de qualsevol superfície tancada és igual a la càrrega continguda a dins de la superfície dividida per ε_0. Si considerem que el camp elèctric creat per una càrrega elèctrica puntual i estàtica té simetria esfèrica, aleshores podem deduir fàcilment quin és el camp elèctric creat per la càrrega. Considerant una superfície esfèrica centrada en la càrrega i de radi r podem escriure:

$$\mathrm{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Utilitzant la llei de Lorentz podem deduir les forces d'interacció entre dues càrregues estacionàries q_1 i q_2:

$$\mathbf{F_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\mathbf{e_{12}} = -\mathbf{F_2}$$

on $\mathbf{F}_1$ és la força sobre la càrrega 1, r_{12} és la distància entre les càrregues i $\mathbf{e}_{12}$ és un vector unitari amb origen sobre la càrrega 2 i sentit cap a la càrrega 1. La força $\mathbf{F}_2$ és igual i oposada a $\mathbf{F}_1$. El factor $1/4\pi\varepsilon_0 = 10^{-7}c^2$ per definició.

Quan hi ha més d'una càrrega present, resulta que la força sobre una de les càrregues s'obté fent la suma vectorial de les forces de Coulomb deguda a cadascuna de les altres càrregues. Aquest fet és fonamental i s'anomena "**principi de superposició**". El principi de superposició es fa evident en les equacions de Maxwell i la llei de Lorentz perquè són equacions diferencials lineals tant pel camp elèctric com pel camp magnètic.

Per tant, per a calcular el camp elèctric d'una distribució de càrregues descrita per la densitat de càrrega ρ podem escriure:

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\substack{tot\\ l'espai}} \frac{\rho(2)\mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$$

19.3 Potencial Elèctric. Estudi energètic de la interacció elèctrica

19.3.1 Definició de la funció potencial elèctric

Suposem una determinada distribució de càrregues elèctriques que genera un camp elèctric. Volem saber quin treball haurem de fer per a transportar una càrrega des d'un punt a fins a un altre punt b:

$$W = -\int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

on **F** és la força elèctrica sobre la càrrega.

És més útil en general avaluar el treball per a transportar una unitat de càrrega. Aleshores podem escriure:

$$W(unitat) = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$$

La segona equació de Maxwell ens diu que el rotacional del camp elèctric és zero. Integrant aquesta equació i utilitzant el teorema de Stockes podem escriure:

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{n}da = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0$$

On S és una superfície qualsevol delimitada per una corba arbitrària tancada C. Considerem ara que C conté els punts a i b. El teorema de Stockes ens diu que necessàriament la integral de camí del camp elèctric sobre qualsevol corba tancada ha de ser zero. *Per tant la integral de camí de a fins a b és independent del camí escollit.*

Com que el treball només depèn del punt inicial i final es pot representar com la resta de dos nombres. Per a veure-ho fem el següent. Escollim un punt de referència P_0 i decidim que per fer la integral escollim un camí que sempre passi per P_0. Anomenem ϕ(a) a $W\left(P_0 \to a\right)$ i ϕ(b) a $W\left(P_0 \to b\right)$. Aleshores podem escriure:

$$W(unitat) = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \phi(b) - \phi(a)$$

D'aquesta manera tenim la funció ϕ definida a cada punt de l'espai. Diem doncs que la funció ϕ és un camp escalar i rep el nom de potencial elèctric. El potencial elèctric en un punt qualsevol de l'espai es pot escriure com:

$$\phi(P) = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

El punt P_0 es pren a normalment a l'infinit. Per tant el potencial elèctric creat per una càrrega puntual situada a l'origen es pot escriure com:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

Degut al principi de superposició dels camps elèctrics, el potencial creat per un conjunt de càrregues es podrà escriure com la suma dels potencials degut a cadascuna de les càrregues. Si tenim una distribució de càrregues, aleshores el potencial elèctric es podrà escriure com:

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV$$

19.3.2 Relació entre el camp elèctric i el potencial

Considerem ara el cas particular en el que els punts a i b són molt propers i només es troben separats per una distància infinitesimal ds. Aleshores:

$$W(unitat) = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$
$$W(unitat) = \phi(b) - \phi(a) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{s}$$

Per tant deduïm que podem escriure el camp elèctric en termes del potencial elèctric de la forma següent:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

Aquesta equació permet calcular el camp elèctric en termes del potencial elèctric. Això és útil perquè per a calcular el potencial elèctric només cal avaluar una única integral amb una dependència de 1/r que acostuma a ser més senzill que calcular-ne tres amb una dependència $1/r^2$.

19.3.3 Descripció geomètrica del camp elèctric i del potencial elèctric

Les dues lleis de l'electrostàtica es poden representar geomètricament. Considerem el cas senzill d'una càrrega puntual. El camp elèctric el podem representar mitjançant línies de camp. Les línies de camp elèctric són per definició tangents al vector camp elèctric en cada punt. S'acostuma a prendre com a regle que la magnitud del camp elèctric es representi mitjançant la densitat de les línies de camp (número de línies per unitat d'àrea). En el cas d'una càrrega puntual aquesta regle es compleix simplement dibuixant línies radials.

Per a representar el potencial elèctric es dibuixen superfícies equipotencials a on ϕ és constant. Com que el camp elèctric és el gradient del potencial i el gradient està en la direcció de màxima variació del potencial el camp elèctric ha de ser perpendicular a les superfícies equipotencials. Si no ho fos hi hauria una component de camp elèctric sobre la superfície, la qual cosa indicaria l'existència d'un gradient de potencial sobre la superfície, la qual cosa entraria en contradicció amb la pròpia definició de superfície equipotencial. Per a una càrrega puntual les superfícies equipotencials han de ser doncs esferes centrades en la pròpia càrrega.

19.4 Energia d'un condensador. Forces en conductors carregats

En un condensador es verifica la relació Q = C·V. L'energia dU necessària per afegir un dQ quan el condensador està a un voltatge V es pot escriure com:

$$dU = VdQ$$

Integrant trobem que:

$$\int_0^U dU = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Per trobar la força entre les plaques d'un condensador que té una càrrega Q constant podem utilitzar el principi dels treballs virtuals que ens diu que:

$$F = -\frac{dU}{dz} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{dz}$$

Per trobar la força entre les plaques d'un condensador tal que la diferència de potencial entre les plaques es constant, cal tenir en compte l'energia proporcionada pel generador per a mantenir el potencial constant, doncs haurà de transmetre càrrega i energia al condensador. Aleshores escrivim:

$$dU = \frac{1}{2}V^2 dC = -Fdz + VdQ \qquad \frac{1}{2}V^2 dC = -Fdz + V^2 dC$$

$$F = \frac{1}{2}V^2 \frac{dC}{dz}$$

Observem que la força és la mateixa en tots dos casos.

19.5. Conservació de la càrrega elèctrica

Si sobre la quarta equació de Maxwell prenem la divergència obtenim:

$$0 = \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

doncs la divergència de la rotacional de qualsevol camp vectorial és zero. Utilitzant la primera equació de Maxwell obtenim:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

l'expressió que correspon a la conservació local de la càrrega elèctrica. Aquesta expressió ens diu que si considerem un diferencial de volum dV, la quantitat de càrrega que desapareix d'aquest volum per unitat de temps es deu a un flux equivalent de càrrega a través de la superfície del dV.

Utilitzant el teorema de Gauss podem escriure:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

la qual cosa ens indica que la quantitat de càrrega que per unitat de temps abandona el volum V (delimitat per la superfície S) ha de ser igual a la variació temporal de la quantitat total de càrrega continguda en aquest volum. És a dir, la quantitat de càrrega que per unitat de temps abandona el volum ha de ser la quantitat de càrrega que desapareix del volum per unitat de temps.

19.6 El camp elèctric i el potencial elèctric en diverses situacions

19.6.1 Càlcul de camps elèctrics utilitzant la llei de Gauss

Camp Elèctric creat per una línia de càrrega

Si prenem una superfície cilíndrica al voltant de la línea i assumim, per simetria, que el camp elèctric es dirigeix radialment cap enfora. Aleshores podem aplicar la llei de Gauss al cilindre:

$$\mathrm{E} \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \cdot l$$

$$\mathrm{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

En aquest cas el camp elèctric depèn de la inversa de la primera potència de la distància a la línea.

Camp Elèctric creat per una distribució superficial de càrrega

Per simetria, el camp elèctric ha de ser normal a la superfície. Prenem com a superfície de Gauss una caixa rectangular amb dues cares de superfície A paral·leles a la superfície. La càrrega total continguda a la caixa és aleshores σA. Utilitzant la llei de Gauss:

$$E \cdot A + E \cdot A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot A$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Si enlloc d'una única superfície en tenim dues amb densitat de càrrega iguals i oposades, per simple superposició dels camps creats per cadascuna de les superfícies resulta que:

$$E(\text{entre les superfícies}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E(fora) = 0$$

Camp elèctric a l'interior d'una distribució esfèrica de càrrega. Camp elèctric a l'interior d'una superfície esfèrica.

Sigui ρ la quantitat de càrrega per unitat de volum i R el radi de l'esfera. Per simetria considerem que el camp electric és radial i té el mateix valor a tots els punts que estan a la mateixa distància del centre. Prenent una superfície esfèrica de radi r < R i aplicant la llei de Gauss:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Si tenim la càrrega distribuïda en una fina superfície esfèrica enlloc de la distribució volúmica de càrrega, assumint que el camp elèctric, per simetria ha de ser radial, arribem a la conclusió de que el camp elèctric és zero a dins de la superfície.

19.6.2. Camps elèctrics en conductors

Un conductor és un sòlid que conté molts electrons lliures que es poden moure lliurament en el material, però no poden abandonar-lo. En un metall, hi ha tant electrons lliures que qualsevol camp elèctric en posarà en moviment una gran quantitat. Els electrons es mouen fins que es distribueixen de tal manera que el camp elèctric a dins del conductor sigui nul. Això implica que el potencial elèctric a l'interior del metall és constant. Per tant qualsevol conductor és una regió equipotencial, ien particular, la superfície del conductor serà una superfície equipotencial.

La llei de Gauss ens diu que si el camp elèctric és zero a l'interior del metall, aleshores la densitat de càrrega ha de ser nul·la a l'interior del metall. Per tant no hi ha càrregues a dins d'un conductor. Aleshores, com pot ser que un conductor tingui càrrega elèctrica? La resposta és que les càrregues s'acumulen a la superfície del metall a on hi ha forces molt intenses que no les permeten escapar. L'excés de càrrega d'un conductor s'acumula entre una o dues capes d'àtoms de la superfície.

El camp elèctric just a fora de la superfície haurà de ser normal a la superfície, ja que s'hi hi hagués una component tangencial, això voldria dir que a la superfície hi hauria un gradient de potencial elèctric. Podem utilitzar la llei de Gauss per a establir la relació existent entre el camp elèctric a cada punt de la superfície amb la distribució superficial de càrrega. Si considerem una petita superfície de Gauss en forma de capsa cilíndrica, i tenint en compte que el camp elèctric és nul a dins del metall en resulta que:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Gàbia de Faraday

Finalment, podem demostrar que el camp elèctric a dins d'una cavitat metàl·lica és zero. Sabem que a dins del metall el camp és nul i la densitat de càrrega és zero. Podria ocorrer que a superfície de la cavitat hi hagués una distribució superficial de càrrega que generés un camp elèctric dins de la cavitat. Les línies de camp elèctric anirien des de les zones on l'acumulació de càrrega fos positiva fins a les zones on l'acumulació de càrrega fos negativa. Si això fos així, si considerem una corba tancada que seguis una línia de camp en particular i que després es tanqués a dins del propi metall, arribaríem a la conclusió de que:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$$

En camp electroestàtics sabem que això no pot ser cert, i per tant, no hi pot haver camps elèctrics a dins d'una cavitat metàl·lica. Les cavitats metàl·liques queden doncs totalment aïllades de qualsevol fenomen elèctric que s'esdevingui a l'exterior del metall. Aquest fet té moltes aplicacions tecnològiques, en particular en la protecció i aïllament de circuits elèctrics i electrònics.

19.6.3. Potencial elèctric generat per un dipol. Aproximació dipolar per a una distribució arbitrària de càrregues.

Sigui $q\phi_0 = q/4\pi\varepsilon_0 r$ el potencial elèctric creat per una càrrega positiva situada a l'origen de coordenades. El potencial elèctric creat per dues càrregues situades sobre l'eix z i amb coordenades d/2 i –d/2 es pot escriure com:

$$q\phi = q\phi_0\left(z-d/2\right) - q\phi_0\left(z+d/2\right)$$
$$\phi = -\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\cdot qd$$

Les càrregues no cal imaginar-les sobre l'eix z, podem imaginar-nos qualsevol orientació. Definim el vector **d** com un vector amb origen a la càrrega negativa i final sobre la càrrega positiva. Podem escriure aleshores ϕ en forma vectorial com:

$$\phi = -\nabla\phi_0\cdot q\mathbf{d}$$

Finalment, si definim el moment dipolar **p** = q**d** podem escriure:

$$\phi = -\nabla\phi_0\cdot\mathbf{p}$$

Tenint en compte que:

$$-\frac{\partial\phi_0}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}$$
$$\phi = -\nabla\phi_0\cdot\mathbf{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

Ara podem calcular fàcilment el camp elèctric:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \qquad -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3z}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3xz}{r^5}$$
$$\phi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{r^3} \qquad -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3z}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3yz}{r^5}$$
$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3z}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3z^2}{r^5} - \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^3}$$

Finalment podem escriure una component de camp elèctric paral·lela al moment dipolar i un altre de perpendicular:

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3z}{r^5} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3\cos\theta\sin\theta}{r^3}$$

$$E_{\parallel} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$$

Fixem-nos que el camp elèctric creat per un dipol decreix inversament amb la tercera potència de la distància i que a θ=0º el camp elèctric és el doble que a θ=90º i amb direccions contraries.

Aproximació Dipolar per a una distribució arbitrària

Suposem una distribució de càrregues puntuals i que només estem interessats en calcular el camp elèctric en punts llunyans respecte a la distribució. El potencial elèctric creat per la distribució es pot escriure exactament com:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

on r_i és la distància entre cada càrrega i i el punt P a on volem calcular els camps. Sigui **R** un vector que va des de l'origen de coordenades fins a P. En primera aproximació podríem escriure:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$$

on Q és la càrrega total de la distribució. Si l'objecte és neutre necessitem una aproximació millor. Considerem aleshores:

$$r_i \simeq R - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r$$

on $\mathbf{d}_i$ és el vector posició de la càrrega q_i i $\mathbf{e}_r$ és un vector unitari en la direcció de R. Podem escriure aleshores:

$$\frac{1}{r_i} \simeq \frac{1}{R} \frac{1}{(1 - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r / R)} \simeq \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{R}\right)$$

Finalment:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_r}{R^2}$$

Si definim el moment dipolar de la distribució com:

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i$$

podem escriure el potencial com:

$$\phi == \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{R^2}$$

Això fa que el camps dipolars siguin tant importants, doncs una distribució neutre de càrrega genera un potencial i un camp elèctric que es correspon amb el d'un cert dipol amb moment dipolar **p**. Hi ha alguns casos, com la molècula de CO_2 en que el moment dipolar és zero degut a la simetria de la molècula. En aquests casos cal fer una expansió més precisa per a poder obtenir un potencial anomenat quadrupolar.

19.6.4 El mètode de les imatges. Camp elèctric generat per una càrrega puntual en front d'una superfície metàl·lica. Camp elèctric generat per una càrrega elèctrica en front d'una esfera metàl·lica.

Suposem una certa distribució de càrregues. Aquesta distribució de càrregues crea un camp elèctric on s'hi defineixen també superfícies equipotencials. Si en una determinada superfície equipotencial hi posem un conductor amb el mateix potencial i la mateixa forma que la superfície equipotencial, el camp elèctric no varia. Utilitzant aquest principi podem calcular camps elèctric quan tenim càrregues enfront d'un conductor. Anem a veure dos exemples:

Càrrega puntual front una superfície plana conductora

Si estudiem el camp elèctric generat per un dipol veiem que entre mig hi tenim una superfie equipotencial plana amb potencial zero. Això ens permet calcular el camp elèctric en el cas d'una càrrega enfront d'una superfície conductora connectada a terra. El camp elèctric serà el mateix que el del dipol.

Càrrega puntual front a una esfera conductora

Resulta que el camp creat per dues càrregues desiguals genera una equipotencial que resulta ser una esfera.

El potencial en un cert punt P de l'equipotencial degut a q_2 (dins de l'esfera) i a q_1 (fora de l'esfera) serà nul si es verifica:

$$\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}=0 \qquad \frac{r_2}{r_1}=-\frac{q_2}{q_1}$$

Una esfera es pot definir com el lloc de tots els punts tal que el quocient de les distàncies a dos punts determinats és constant. Si al radi de l'esfera l'anomenem a i la distància de q_1 al centre de l'esfera l'anomenem b i q_2 es situa a una distància a^2/b del centre de l'esfera (cap a la dreta) aleshores:

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{a}{b}=-\frac{q_2}{q_1} \qquad q_2=-\frac{a}{b}q_1$$

19.6.5 Camp elèctric en les punxes

El camp elèctric creat per un conductor carregat és més alt en les zones on el radi de curvatura és més petit. Per a veure-ho, considerem dies esferes de radis R i r connectades per un cable de manera que totes dues tinguin el mateix potencial. Aleshores s'ha de verificar que:

$$\frac{Q}{R}=\frac{q}{r}$$

El quocient dels camp elèctrics a les superfícies de les esferes:

$$\frac{E_r}{E_R}=\frac{q}{Q}\cdot\frac{R^2}{r^2}=\frac{R}{r}$$

Els camps estan en relació inversa amb els radis. Si un conductor té punxes, el camp elèctric hi pot prendre valors molt elevats.

19.6.6 Partícules col·loidals en un electròlit.

De la segona equació de Maxwell, vam deduir que el camp elèctric es podia escriure com el gradient d'una funció potencial: $\mathbf{E}=-\nabla\phi$. Si substituïm aquesta expressió en la primera llei de Maxwell, obtenim l'equació de Poisson:

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

on l'operador ∇^2 s'anomena operador Laplacià o Laplaciana. Anem a utilitzar aquesta equació per a calcular el potencial elèctric en una situació en que la distribució de càrrega no està nio fixada ni transportada per un conductor.

Una suspensió col·loidal consisteix en una suspensió en aigua de partícules microscòpiques (anomenades partícules col·loidals) que tenen una certa càrrega elèctrica i que tenen una grandària que des del punt de vista atòmic es pot considerar com de gran o molt gran. A l'aigua considerem que hi ha ions dissolts. Els ions negatius seran atrets per la partícula col·loidal i els ions positius seran repel·lits (suposem la partícula col·loidal amb càrrega positiva). En aquestes condicions volem calcular el potencial elèctric al voltant de la partícula col·loidal.

Per començar suposarem que es tant gran que treballar amb una dimensió es prou correcte. Aleshores escrivim l'equació de Poisson:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Donat un potencial, els ions es distribueixen segons la distribució de Boltzmann:

$$n(x)=n_0\exp\left(-\frac{U(x)}{kT}\right)$$

on U(x) és l'energia potencial: U(x) = qϕ(x). Podem escriure aleshores la densitat d'ions positius i negatius (assumim que els ions positius i negatius transporten la mateixa càrrega pero de signe contrari):

$$n_+(x) = n_0 \exp\left(-\frac{q_e\phi(x)}{kT}\right) \qquad n_-(x) = n_0 \exp\left(+\frac{q_e\phi(x)}{kT}\right)$$

La densitat total de càrrega serà $\rho = q_e(n_+(x)-n_-(x))$. Utilitzant aquesta igualtat en l'equació de Poisson obtenim:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\frac{q_e n_0}{\varepsilon_0}\left[\exp\left(-\frac{q_e\phi(x)}{kT}\right) - \exp\left(+\frac{q_e\phi(x)}{kT}\right)\right]$$

Considerem ara que el potencial elèctric és petit o que la temperatura és elevada, aleshores podem aproximar les funcions exponencials (exp(x)=1+x) i obtenim:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{2q_e^2 n_0}{\varepsilon_0 kT}\phi(x)$$

La solució general d'aquesta equació és:

$$\phi = A\exp(-x/D) + B\exp(+x/D)$$

Com que el potencial no pot ser infinit a llargues distancies tindrem B=0. Per tant tindrem:

$$\phi = A\exp(-x/D) \qquad D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{2n_o q_e^2}}$$

Per trobar la constant A calculem el camp elèctric a x=0. Aquest camp es pot escriure també en termes de la càrrega superficial de la partícula col·loidal:

$$E(x=0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad E(x=0) = -\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_0 = \frac{A}{D}$$

$$A = \frac{\sigma D}{\varepsilon_0}$$