

TEMA 18

Ones en medis elàstics

Energia que transporten

Fenòmens característics

Mètodes experimentals

El so com a exemple d'ona longitudinal.

Contaminació acústica

18.1 El so

18.1.1 Introducció

18.1.2 Canviar la densitat implica canviar la pressió

18.1.3 La densitat canvia quan el gas es mou

18.1.4 Les variacions de pressió generen moviment

18.1.5. Velocitat del so

18.2. Equació d'ones en una corda

18.3 Pulsacions i Paquets d'Ones

18.4. Modes

18.4.1 Reflexió de les ones

18.4.2 Ones estacionàries

18.5. Efecte Doppler

18.6 Energia que transporten les ones

18.7 Contaminació acústica

18

Ones en medis elàstics. Energia que transporten. Fenòmens característics. Mètodes experimentals. El so com a exemple d'ona longitudinal. Contaminació acústica.

18.1 El so

18.1.1 Introducció

La propagació del so d'un lloc a un altre és merament una conseqüència de la mecànica i de les propietats dels gasos, si es propaga en un gas, o de les propietats de líquids o sòlids, si es propaga en aquests mitjans.

Si movem un objecte a l'aire, es genera una variació de la pressió en l'aire. Aquesta variació de la pressió es transmet als punts al voltant dels quals s'ha produït la variació de pressió, de manera que una ona de pressió inicia el seu camí a través de l'aire.

Volem ara formular aquest procés i hem de decidir primer quines variables necessitem. Primer de tot volem conèixer el **desplaçament** de l'aire en l'ona sonora. Voldríem també descriure com canvia la **densitat** de l'aire al produir-se el desplaçament. La **pressió** de l'aire també canvia i és per tant una variable important. L'aire es mourà amb una certa **velocitat** i amb una certa **acceleració**.

Des del punt de vista de la teoria cinètica, si tenim una major densitat de molècules en un lloc que en un altre, les molècules es mouran des de la regió de més densitat a la regió de menys densitat intentant d'igualar les dues densitats.

*Per tant, per obtenir una ona sonora, cal que conforme les molècules de la regió de densitat i pressió més elevades es mouen **transmetin el seu moment** a la regió adjacent de menor pressió i densitat. És necessari doncs, que les regions en les que la densitat i la pressió canvia siguin molt més grans que la distància que recorren les molècules abans de col·lisionar amb altres molècules. Aquesta distància s'anomena recorregut lliure mig i queda clar doncs que la longitud d'ona haurà de ser molt més gran que aquesta distància.*

Considerarem ones en una dimensió. Això ho podem fer si considerem que estem suficientment lluny de la font de les ones sonores. El desplaçament de l'aire s'escriurà $\chi(x,t)$. La pressió i la densitat seran funcions de x i t .

La física de les ones sonores involucra tres fets bàsics que anem a establir a continuació:

18.1.2 Canviar la densitat implica canviar la pressió

Abans que arribi l'ona sonora, hi ha una certa pressió P_0 i una certa densitat ρ_0 . La pressió serà una certa funció de la densitat i per tant escribim: $P=f(\rho)$. Per a les ones sonores les variacions de pressió són molt petites. Per a mesurar la intensitat d'un so s'utilitza una escala logarítmica:

$$I = 20 \log_{10}(P/P_{ref})$$

on la pressió de referència $P_{ref} = 2 \cdot 10^{-10}$ bar = 20 μ P. Un so de 60 decibels correspon a una pressió de $P=10^3 P_{ref}$, que és molt petita compara amb una pressió d'una atmosfera. Sigui aleshores P_e l'increment de pressió i ρ_e l'increment de densitat; com que tots dos són molt petits, podem escriure:

$$P_0 + P_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0)$$

i per tant:

$$P_e = \kappa \rho_e \quad \text{on } \kappa = f'(\rho_0) = \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}$$

18.1.3 La densitat canvia quan el gas es mou

Considerem l'aire que hi ha entre un cert punt x i $x+\Delta x$. La funció $\chi(x,t)$ ens indica quin és el desplaçament de l'aire en cada punt quan ha transcorregut un cert temps t . Com que el desplaçament no és necessàriament el mateix per x que per $x+\Delta x$, es produirà un canvi en la densitat de l'aire. La conservació de la matèria implica que s'ha de verificar la següent relació:

$$\begin{aligned} \rho_0 [(x+\Delta x) - x] &= \rho [(x+\Delta x + \chi(x+\Delta x, t)) - (x + \chi(x, t))] \\ \rho_0 \Delta x &= \rho [\Delta x + (\chi(x+\Delta x, t) - \chi(x, t))] \end{aligned}$$

Com que considerem un Δx molt petit, podem escriure $\chi(x+\Delta x, t) - \chi(x, t) = \Delta x \partial \chi / \partial x$ i per tant:

$$\begin{aligned} \rho_0 \Delta x &= \rho [\Delta x + \Delta x \partial \chi / \partial x] \\ \rho_0 &= (\rho_0 + \rho_e) [1 + \partial \chi / \partial x] \end{aligned}$$

aïllant ρ_e i tenint en compte que ρ_e i $\partial \chi / \partial x$ són números molt petits i que el seu producte constitueix una magnitud de segon ordre:

$$\rho_e = -\rho_0 \partial \chi / \partial x$$

Fixem-nos que si la derivada és positiva la densitat disminueix, tal i com ha de passar.

18.1.4 Les variacions de pressió generen moviment

Si considerem l'aire situat en l'interval definit per x i $x+\Delta x$, la massa d'aquest interval multiplicat per l'acceleració es pot escriure com: $\rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$. Aquesta massa està sotmesa a una força per unitat d'àrea cap a la dreta $P(x,t)$ i una força per unitat d'àrea cap a l'esquerra $P(x+\Delta x,t)$. Per tant, la força total s'escriu com:

$$P(x,t) - P(x+\Delta x,t) = -\Delta x \frac{\partial P}{\partial x} = -\Delta x \frac{\partial P_e}{\partial x}$$

Ara ja estem en condicions d'escriure l'equació del moviment:

$$\rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\Delta x \frac{\partial P_e}{\partial x}$$

Com que ja sabem que:

$$P_e = \kappa p_e = -\rho_0 \kappa \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

substituïm i ens queda que:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

Aquesta és l'equació que descriu el comportament del so.

18.1.5. Velocitat del so

De l'equació d'ones deduïm que la velocitat del so es pot escriure com:

$$v^2 = \kappa = \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}$$

La pressió i la temperatura canvien adiabàticament en una ona sonora. L'aire s'escalfa en les zones de compressió i es refreda en les zones de descompressió. A la realitat si que es produeix un petit flux de calor que produeix una petita absorció de l'energia de l'ona. Aquesta absorció serà tant més important com més s'acosti la longitud d'ona al recorregut lliure mig de les molècules en les que es transmet el so.

En un procés adiabàtic podem escriure $PV^\gamma = ct$ i per tant:

$$P = \text{const} \cdot \rho^\gamma$$

$$v^2 = \frac{dP}{d\rho} = \text{const} \cdot \gamma \cdot \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma P}{\rho}$$

Per a un gas ideal, $PV = NkT$. Multiplicant numerador i denominador pel volum obtenim:

$$v^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{\gamma KT}{m} = \frac{\gamma RT}{\mu}$$

on m és la massa d'una molècula i μ el pes molecular.

Si prenem $R=8,314\text{J/mol}\cdot\text{K}$, per l'aire $\gamma=1.4$ i el pes molecular mig és de 28,95 grams/mol. Per tant

$$v_{\text{sound}} = \sqrt{\frac{1.4(8.314\text{J/mol}\cdot\text{K})}{.02895\text{kg/mol}}}\sqrt{T} = 20.05\sqrt{T} \text{ m/s}$$

És possible escriure l'aproximació següent:

$$v_{\text{sound in air}} \approx 331.4 + 0.6T_C \text{ m/s}$$

on T_C és la temperatura en graus Celsius.

Aquestes expressions són vàlides per aire sec. Per l'aire humit, canvien de valor γ i μ i el càlcul esdevé complex, però ens podem conformar amb aquesta taula:

M/S	RH%								
T DegC	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	331.5	331.5	331.5	331.6	331.6	331.6	331.7	331.7	331.7
5	334.5	334.6	334.6	334.7	334.7	334.7	334.8	334.8	334.9
10	337.5	337.6	337.7	337.7	337.8	337.9	337.9	338.0	338.0
15	340.5	340.6	340.7	340.8	340.9	341.0	341.1	341.2	341.2
20	343.5	343.6	343.7	343.9	344.0	344.1	344.2	344.4	344.5
25	346.4	346.6	346.8	347.0	347.1	347.3	347.5	347.6	347.8
30	349.4	349.6	349.9	350.1	350.3	350.5	350.8	351.0	351.2

Aquesta taula està treta del llibre: "Tables of Physical and Chemical Constants" by "Kaye & Laby". Editorial "Longman Group Limited".

És interessant comparar aquesta velocitat mitja amb les de les molècules de l'aire. Sabem que:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv_m^2 \quad kT = \frac{1}{3}mv_m^2$$

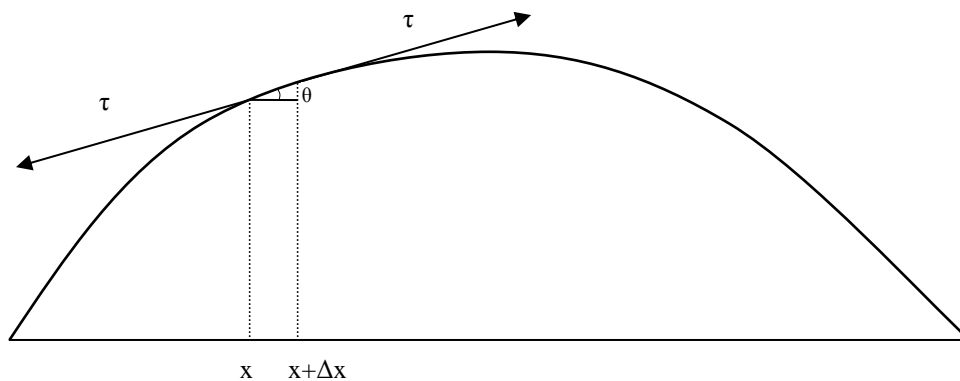
per tant:

$$v^2 = \frac{\gamma}{3} v_m^2$$

La velocitat del so és més petita que la velocitat mitjana de les molècules del gas, tal i com un pensa que ha de ser.

18.2. Equació d'ones en una corda

Anem a estudiar el moviment d'una corda de longitud l , estirada horitzontalment i subjecta a cada extrem i en estat de vibració. Per simplificar el problema assumirem que la corda vibra només en un pla vertical i que l'amplitud de vibració es prou petita com per a que cada punt de la corda es mogui només verticalment i que la tensió τ de la corda no canviï apreciablement durant la vibració.



La distància que el punt x s'ha mogut des de la línia recta horitzontal que representa la posició d'equilibri de la corda la designarem per $u(x)$. El moviment de la corda serà descrit per una funció $u(x,t)$, localitzant cada punt x sobre la corda a cada instant de temps.

Per obtenir una equació del moviment de la corda, considerarem un segment de corda de longitud dx entre x i $x+dx$. Si la densitat de la corda per unitat de longitud és σ , aleshores la massa del segment és σdx . La velocitat de la corda a cada punt és $\partial u / \partial t$ i la pendent es pot escriure com $\partial u / \partial x$. La component vertical de la tensió exercida de l'esquerra cap a la dreta es pot escriure com:

$$\tau_u = \tau \sin \theta$$

on θ és l'angle entre la corda i l'horitzontal. Assumim que aquest angle és molt petit. I que podem escriure:

$$\tau \sin \theta = \tau \operatorname{tg} \theta = \tau \frac{\partial u}{\partial x}$$

La força neta d'ascensió dF feta per la tensió, sobre el segment dx sobre la corda és la diferència en la component vertical τ_u entre els dos extrems del segment:

$$dF = [\tau_u]_{x+dx} - [\tau_u]_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

Com que τ és pràcticament constant podem escriure l'equació del moviment:

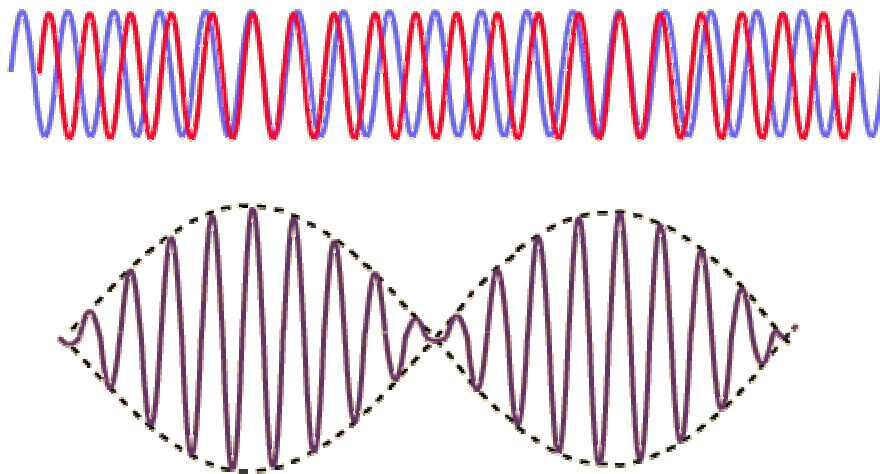
$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Finalment:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$$

18.3 Pulsacions i Paquets d'Ones

L'equació d'ones és una equació diferencial lineal, per tant si coneixem dues solucions, la suma d'aquestes dues solucions és també una solució. Al sumar ones ens trobarem amb fenòmens interessants: anem a veure que passa quan sumem dues ones de freqüències lleugerament diferents i amb la mateixa amplitud. Si fem la suma gràficament obtenim:



Si fem la suma analíticament:

$$A \cos[\omega_1 t - k_1 x] + A \cos[\omega_2 t - k_2 x] = 2A \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x\right]$$

Tenim doncs una ona de freqüència $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ modulada per una ona de freqüència $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ que actua com a ona moduladora. La modulació, si és audible, escoltarem un so de freqüència $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ que presenta una variació de la intensitat amb el temps, diem que escoltem pulsacions. Aquestes pulsacions les escoltem amb una freqüència que correspon al doble de la freqüència de l'ona moduladora.

En medis dispersius, en els que la velocitat de fase de les ones depèn de la longitud d'ona, l'ona moduladora no avançarà a la velocitat de fase. La velocitat de fase d'una ona harmònica es pot escriure com:

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

L'ona modulada avança a una velocitat:

$$v_f = \frac{\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)}{\frac{1}{2}(k_1 + k_2)} \simeq \frac{\omega}{k}$$

que serà pràcticament idèntica a la velocitat de les ones que interfereixen. Com que la diferència entre les freqüències de les dues ones que interfereixen la considerem molt petita, la velocitat a la que avança la modulació es pot escriure com:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

D'aquesta velocitat se'n diu velocitat de grup i pot ser força diferent de la velocitat de fase. Aquesta velocitat ens indica la velocitat màxima a la que podem transmetre informació (en aquest cas en forma de pulsacions). Anem a veure que aquesta velocitat de grup també correspon a la velocitat a la que avança un paquet d'ones.

Un paquet d'ones es pot escriure com la suma d'infinites ones de diferents freqüències:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \exp[i(\omega t - kx)] dk$$

el coeficient $A(k)$ representa la distribució d'amplituds de les ones que sumem. Els casos més interessants tenen lloc quan $A(k)$ té un valor molt important únicament en les proximitats d'un nombre d'ones particular k_0 , per exemple, i tendeix a zero pels valors de k situats fora d'un entorn de k_0 representat per $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$. Aleshores la funció d'ones es pot escriure com:

$$\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) \exp[i(\omega t - kx)] dk$$

Tota funció d'aquest tipus rep el nom de paquet d'ones. El concepte de velocitat de grup només és aplicable a aquells casos representables mitjançant un paquet d'ones. Per a aquests casos podem desenvolupar $\omega(k)$:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$$

Ho podem escriure més breument:

$$\omega = \omega_0 + (k - k_0) \omega'_0$$

Podem rescriure ara les fases de cadascuna de les ones:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + (k - k_0) \omega'_0 \\ \omega t - kx &= [\omega_0 + (k - k_0) \omega'_0] t - kx + k_0 x - k_0 x \\ \omega t - kx &= \omega_0 t - k_0 x + (k - k_0) \omega'_0 t - (k - k_0) x\end{aligned}$$

Ara podem rescriure el paquet d'ones com:

$$\Psi(x, t) = \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) \exp[i((k - k_0) \omega'_0 t - (k - k_0) x)] dk$$

Fixem-nos aleshores que el que ens queda a dins de la integral, donats els petits valors de $k - k_0$ i de $(k - k_0) \omega'_0$, correspon a una funció que varia lentament a l'espai i amb el temps, i que per tant correspon a l'envolvent d'un grup d'ones. Aquesta envolvent es mou a una velocitat:

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$$

18.4. Modes

18.4.1 Reflexió de les ones

Anem a estudiar que passa quan intentem confinar ones en una regió finita. Anem a veure que passa primer quan confinem una ona en una frontera. Suposem una corda lligada per un extrem. Matemàticament direm que a la posició $x=0$ el desplaçament y de la corda ha de ser zero. Anem a imposar aquesta condició a la solució més general de l'equació d'ones:

$$y = F(x - ct) + G(x + ct)$$

S'haurà de verificar que $y=0$ per $x=0$ i per a qualsevol t , és a dir:

$$0 = F(-ct) + G(ct) \quad G(ct) = -F(-ct)$$

Per tant:

$$y = F(x - ct) - F(-x - ct)$$

Aquest resultat equival a dir que l'ona es reflecteix amb un canvi de signe. Considerem ara la reflexió d'una ona periòdica, és a dir, considerem:

$$F(x - ct) = \exp[i\omega(t - x/c)]$$

Aleshores obtenim:

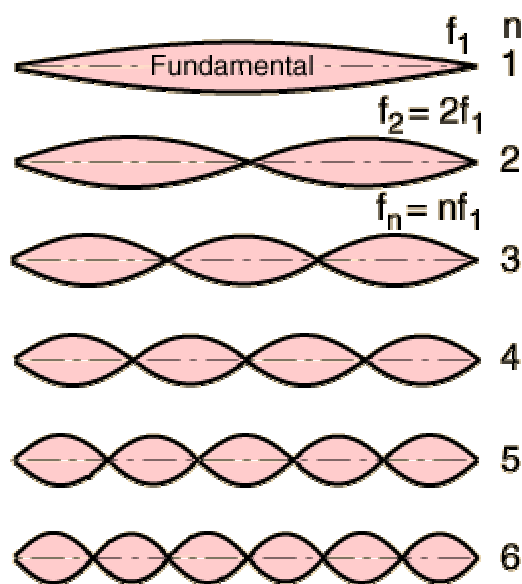
$$y = \exp[i\omega(t - x/c)] - \exp[i\omega(t + x/c)] = -2i \exp[i\omega t] \sin[\omega x/c]$$

Aquesta expressió ens diu que si ens fixem qualsevol x en particular la corda oscil·la amb una freqüència ω . Hi ha punts on no hi ha cap desplaçament, els que verifiquen $\sin[\omega x/c] = 0$. Podem veure també que la longitud d'un cicle de la funció sinus coincideix amb la longitud d'ona de qualsevol de les dues ones que interfereixen:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Els punts on no hi ha moviment verifiquen $\sin[\omega x/c] = 0$, o sigui $\omega x/c = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$. També podem escriure $x = n\lambda/2$. Aquests punts s'anomenen nodes. Entre dos nodes succesius, cada punt es mou amunt i avall sinusoidalment, però el moviment es manté fix a l'espai. Aquesta és la característica fonamental del que anomenem un mode o ona estacionària.

18.4.2 Ones estacionàries



Ara el següent pas és considerar que passa si la corda està lligada pels dos extrems, a $x=0$ i a $x=L$. L'única possibilitat de tenir modes amb la solució a l'equació d'ones que em trobat abans és que la funció sinus s'anul·li a $x=0$ i a $x=L$. Per tant s'haurà de complir:

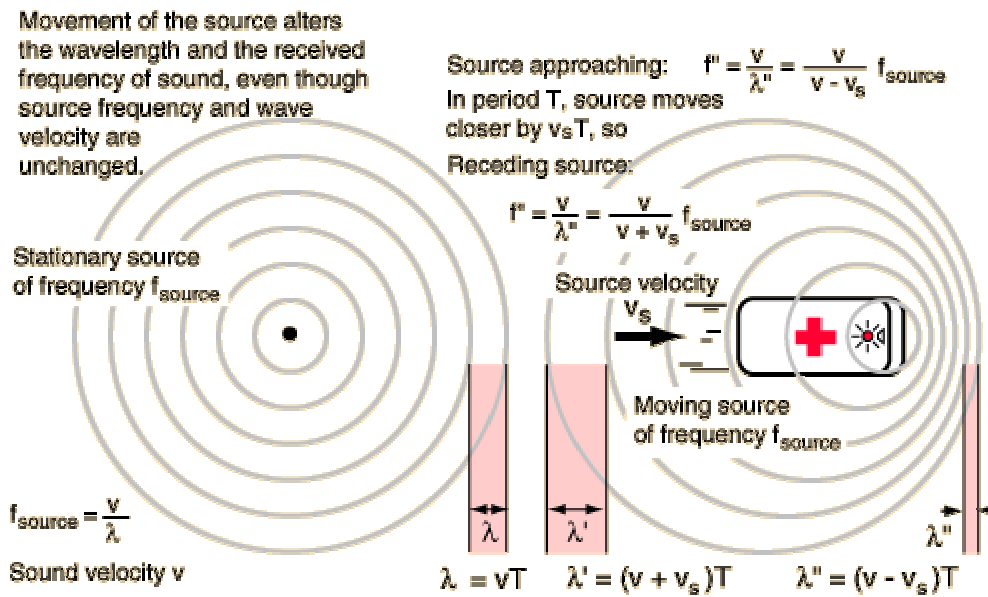
$$\frac{\omega L}{c} = kL = n\pi \quad \lambda = \frac{2L}{n}$$

$$v = n \frac{c}{2L}$$

També obtindrem modes de vibració en cordes subjectades només per un extrem, en tubs buits (com els dels instruments musicals), etc

18.5. Efecte Doppler

Suposem una font sonora que es desplaça a una velocitat v_f i que emet un so amb una freqüència ν_s . El so es desplaça a una velocitat c i l'observador a una velocitat v_o . Anem a calcular quina freqüència escolta l'observador. Suposarem que la font es troba a la dreta de l'observador (quantitats prima) o a l'esquerra (quantitats amb doble prima) i que tots dos tenen velocitats positives (és a dir, es mouen cap a la dreta).



Com que l'emissor està en moviment, la longitud d'ona i la freqüència de les ones emeses canvia:

$$\lambda = T \cdot c \quad \lambda'' = T \cdot c - T \cdot v_f \quad v'' = \frac{c}{\lambda''} = v \frac{c}{c - v_f}$$

$$\lambda' = T \cdot c + T \cdot v_f \quad v' = \frac{c}{\lambda'} = v \frac{c}{c + v_f}$$

Anem a calcular ara quina és la freqüència que sent l'observador. Com que l'observador es mou, sent una freqüència diferent degut a que veu que les ones se li aproximen a una velocitat $c - v_o$. Per tant escrivim immediatament:

$$v''_0 = \frac{c - v_o}{\lambda''} = v \frac{c - v_o}{c - v_f} \quad v'_0 = \frac{c - v_o}{\lambda'} = v \frac{c - v_o}{c + v_f}$$

18.6 Energia que transporten les ones

Una propietat fonamental de les ones es que transporten energia i moment. Considerem per exemple les ones sonores. Sabem que:

$$P_e = -\rho_0 \kappa \partial \chi / \partial x$$

Considerem una superfície d'àrea A . El treball per unitat de temps que l'ona realitza sobre aquesta superfície (és a dir, la quantitat d'energia que li pot transferir per unitat de temps) en moure-la es pot escriure fàcilment com:

$$P = P_e \dot{\chi} = \rho_0 \kappa \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

Si tenim una ona harmònica podem escriure $\chi = A \cos[\omega(t - x/c)]$ i substituint a l'equació anterior i recordant que $c^2 = \kappa$ tenim:

$$P = P_e \dot{\chi} = A^2 \rho_0 c \omega^2 \sin^2[\omega(t - x/c)]$$

Veiem doncs que la transferència d'energia es proporcional al quadrat de l'amplitud i de la freqüència. Aquest és un fet general comú per a totes les ones.

La potencia mitja o intensitat d'un so es pot escriure com:

$$I = \frac{1}{2} A^2 \rho_0 c \omega^2$$

L'oïda pot acomodar-se a un marge molt ampli d'intensitats sonores, des de 1pW/m^2 fins a 1W/m^2 , potència que correspon a l'umbral de dolor. L'oïda presenta una resposta quasi logarítmica. Per aquest motiu s'utilitza una escala logarítmica per a descriure el nivell d'intensitat d'una ona sonora i la unitat s'anomena decibel (dB):

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

on $I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$ correspon a l'umbral d'audició. Per $I = 1 \text{W/m}^2$ aleshores $\beta = 120 \text{dB}$

18.7 Contaminació acústica

Als USA ens diuen que:

The Occupational Safety and Health Administration (OSHA) established a national workplace standard for noise exposure called the OSHA Hearing Conservation Standard 29 CFR 1910.95. It limits the time-weighted-average noise exposure for unprotected workers according to the following table.

Permissible Noise Exposure	
Duration per Day (hours)	Sound Level (dBA)
8	90
4	95
2	100
1	105
1/2	110
1/4 or less	115

Maximum impact noise 140 dBA

A la Generalitat de Catalunya, la conselleria de Medi Ambient ens diu que:

Les principals fonts de soroll ambiental són:

- **El trànsit: rodat, ferroviari i aeri**
- **Les activitats industrials i recreatives**
- **El veïnatge**

Durant els darrers anys, l'increment del trànsit ha estat continu i exponencial, tot i que s'han esmerçat molts esforços per aconseguir que cada vegada els vehicles facin menys soroll, continua sent la causa principal de soroll ambiental.

El grau d'industrialització és generador de fonts de soroll, així com les activitats comercials, artesanals, agrícoles, recreatives, instal·lacions etc. A més, les ubicacions de les activitats industrials amb la seva dispersió territorial perifèrica generen una forta mobilitat que escampa més soroll.

El soroll del veïnatge pot ser també una font de molèsties.

El soroll és un contaminant susceptible d'afectar la salut de les persones i la seva qualitat de vida; ja que, a més de tenir incidència sobre la salut, també influeix en la comunicació i el comportament.

La molèstia per soroll porta implícit un fort component subjectiu. Un mateix so pot ser considerat agradable o molest segons les seves característiques, les del receptor i les del moment en què es produeix.

Els efectes sobre la salut poden ser, entre d'altres:

- disminució temporal o permanent de la capacitat auditiva,
- manifestacions de sensacions de molèstia,
- nerviosisme,
- irritabilitat,
- interferències en el son que produeixen: cansament, disminució del rendiment, disminució de la concentració en el treball, alteracions del metabolisme, del sistema nerviós central, del sistema neurovegetatiu, etc.