TEMA 11

Dinàmica de Fluids.

L'equació de continuïtat

L'equació de Bernouilli.

Règim laminar i turbulent.

Aplicacions a dispositius tecnològics d'interès i

al funcionament del sistema cardiovascular humà.

11

Dinàmica de Fluids. L'equació de continuïtat. L'equació de Bernouilli. Règim laminar i turbulent. Aplicacions a dispositius tecnològics d'interès i al funcionament del sistema cardiovascular humà.

11.1. Característiques bàsiques de la descripció del moviment d'un fluid

Per descriure el moviment d'un fluid necessitem conèixer les seves propietats a cada punt i a cada instant de temps. Per exemple a cada punt i per cada temps la velocitat del fluid pot ser diferent, o la pressió, o la densitat, etc.

En particular utilitzarem un camp de vectorial de velocitats per descriure l'estat de moviment d'un fluid. A cada punt li correspondrà un vector que indica la velocitat i direcció del moviment per un instant de temps determinat. Quan el camp de velocitats no depèn explícitament del temps parlarem de *règim estacionari*. En cas contrari parlarem de *règim no estacionari*. Igual que en un camp elèctric és possible definir línies de camp, que en aquest cas s'anomenaran *línies de corrent*, que seran tangents en cada punt al vector velocitat. La densitat de línies de corrent serà proporcional a la velocitat de les partícules. En el cas de règim estacionari les línies de corrent romandran inalterables i per tant en aquest cas i només en aquest cas ens indicaran les trajectòries que segueixen les partícules de fluid. El conjunt de línies de corrent que en un instant donat passen a través d'un diferencial de superfície constitueixen el que s'anomena *tub de corrent*

Necessitarem conèixer també com es relacionen les diferents variables entre elles, com per exemple l'equació d'estat que relaciona la pressió amb la densitat. Per simplificar les equacions al màxim, en molts casos considerarem que el fluid és incompressible, és a dir, l'equació d'estat es reduirà a ρ= cte.

11.2 Equació de continuïtat

L'equació de continuïtat representa la llei de conservació de la massa per a un fluid. Considerem un determinat volum de fluid V envoltat per una determinada superfície S. La llei de conservació de la massa ens dirà que la quantitat de massa que desapareix d'aquest volum per unitat de temps és la mateixa que està sortint a través de la superfície S per unitat de temps.

La quantitat de massa dins de V es pot escriure com:

$$m = \int_V \rho dV$$

La variació en el temps vindrà donada per:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Aquesta variació de massa ha d'ésser deguda al flux de massa a través de S, és a dir:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Pel teorema de Gauss la segona integral es pot escriure com una integral de volum:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$$

Com que aquesta igualtat ha d'ésser certa independentment del volum, tindrem, doncs que s'ha de verificar:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Aquesta equació s'anomena equació de continuïtat. El significat físic de cada terme és el següent: $\partial \rho / \partial t$ és la variació de massa per unitat de volum en un volum elemental fix; $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ és la quantitat de massa per unitat de volum que abandona el volum elemental.

Si el fluid és incompressible, l'equació es pot escriure simplement com:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Si el fluid és incompressible, el camp de velocitats **v** té divergència nula. Per tant les línies de corrent no convergeixen mai en cap punt.

11.3 Equacions del moviment

Les equacions del moviment les obtindrem utilitzant les lleis de Newton. Aquestes lleis de Newton s'apliquen sobre el moviment d'un determinat dV de fluid i per tant s'expressen per unitat de volum. Escriurem, doncs:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{a}$$

on **f** és la força per unitat de volum. La forces provindran dels gradients de pressió, de camps de forces externs (que suposarem conservatius) i de la pròpia viscositat del fluid. Escriurem per tant:

$$\rho \mathbf{a} = -\nabla \mathrm{p} - \rho \nabla \phi + \mathbf{f}_{visc}$$

Considerarem que en el nostre fluid $\mathbf{f}_{\mathrm{visc}}$ és menyspreable front a d'altres termes. Aquesta hipòtesi suposa menysprear propietats reals de tots els líquids. Però de tota manera les equacions que deduirem seran essencialment correctes.

El següent pas és escriure l'acceleració. Per definició, l'acceleració és la variació total de la velocitat en funció del temps. El que volem calcular és l'acceleració deguda al canvi de velocitat d'un dV del fluid. En un Δt la coordenada d'un dV canvia en:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t$$

Per tant haurem de calcular:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}\left(x + v_x\Delta t, y + v_y\Delta t, z + v_x\Delta t, t + \Delta t\right) - \mathbf{v}\left(x, y, z, t\right)}{\Delta t}$$

Desenvolupant i restant obtenim, per cadascuna de les components:

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$
$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t}$$
$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

Això es pot reescriure en forma vectorial com:

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$$

La llei de Newton es podrà escriure, doncs com:

$$\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\phi$$

Aquesta equació és pot reescriure fent ús de la següent identitat:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{B}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\right) - \mathbf{C}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)$$
$$(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v} = \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} - \mathbf{v}\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right)$$
$$(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v} = \left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} - \tfrac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{v}^2$$
$$\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} = (\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{v}^2$$

Per tant la llei de Newton es pot escriure finalment com:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{v}^2 = \frac{-\nabla p}{\rho} - \nabla\phi$$

on Ω és el vector vorticitat $\Omega = \nabla\times\mathbf{v}$. Si la vorticitat és zero a tot arreu diem que el flux és irrotacional. La vorticitat és la integral de camí de **v** per unitat de superfície en la direcció perpendicular a Ω. No és difícil demostrar que si una volva cau sobre un líquid, la seva velocitat angular serà ω=Ω/2.

$$\Omega = \frac{2\pi r \langle v \rangle}{\pi r^2} = 2\frac{\langle v \rangle}{r} = 2\omega$$

Si estem interessats només en el càlcul de la velocitat és possible eliminar la pressió de les equacions prenent la rotacional a dues bandes de l'equació:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times \mathbf{v}) = 0$$

Aquesta equació implica que si el flux comença amb Ω=0, Ω continuarà essent zero sempre, el flux roman irrotacional. En aquest cas les equacions a resoldre són:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

11.4 Teorema de Bernouilli

Considerarem el flux estacionari d'un fluid ideal, és a dir $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. Si multipliquem l'equació del moviment per la velocitat **v** obtenim:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} + \phi \right\} = 0$$

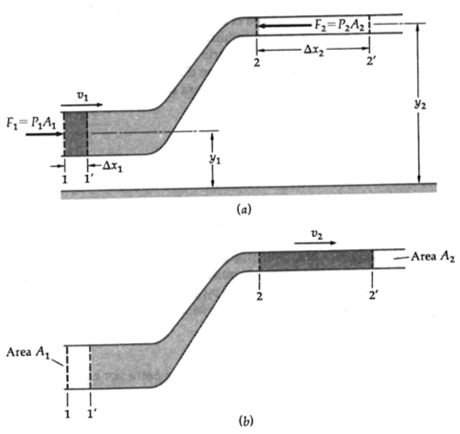
Això ens diu que per un petit desplaçament en la direcció de moviment del líquid, la quantitat entre parèntesi no varia. En un flux estacionari, tots els desplaçaments es produeixen al llarg de línies de corrent, per tant, per tots els punts al llarg d'una línia de corrent podrem escriure:

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} + \phi = cte$$

on la constant en general és diferent per a cada línia de corrent. D'aquesta expressió en diem teorema de Bernouilli. En el cas particular en què Ω=0 aleshores la constant és la mateixa per totes les línies de corrent, tal i com es pot deduir directament de l'equació del moviment.

11.4.1 El Teorema de Bernouilli i el principi de conservació de l'energia

El teorema de Bernouilli és una manera d'escriure la llei de conservació de l'energia. Per veure això, considerem un tub de corrent amb dos extrems 1 i 2. Com que un tub de corrent està fet a base de línies de corrent, no hi ha flux de fluid a través de les parets del tub.



Considerem que el tub té a l'extrem 1 una secció A_1, que fluid circula amb velocitat v_1 i que la densitat del fluid és ρ_1 i l'energia potencial és ϕ_1. A l'altre extrem del tub tindrem una secció A_2, el fluid circula amb velocitat v_2 i la densitat del fluid és ρ_2 i l'energia potencial és ϕ_2. La quantitat de massa que entra i surt del tub en un Δt ha de ser la mateixa, o sigui:

$$\Delta M = \rho_1 v_1 A_1 \Delta t = \rho_2 v_2 A_2 \Delta t$$

Per tant s'ha de verificar que:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

Aquesta equació ens diu que si la densitat roman constant la velocitat del fluid és inversament proporcional a la secció.

Anem a calcular ara el treball que fa la pressió a totes dues bandes del tub en cert Δt. El treball que fa per un costat serà $p_1A_1v_1\Delta t$ i per l'altre $-p_2A_2v_2\Delta t$. La diferència de treballs haurà d'equivaldre al guany d'energia d'una massa ΔM que passi de 1 a 2:

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = \Delta M \left(E_2 - E_1 \right)$$

on E_2 i E_1 són energies per unitat de massa. L'energia per unitat de massa del fluid es pot escriure:

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \phi + U$$

on $\frac{1}{2}v^2$ és l'energia cinètica per unitat de massa, ϕ és l'energia potencial per unitat de massa i U és l'energia interna per unitat de massa.

$$\frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta M} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta M} = \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 + U_2 - \frac{1}{2} v_1^2 - \phi_1 - U_1$$

Ja hem vist que $\Delta M = \rho\, A v \Delta t$. Per tant finalment podem escriure:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + \phi_1 + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 + U_2$$

Això és l'equació de Bernouilli amb un terme addicional per l'energia interna. Si el fluid és incompressible aleshores l'energia interna és la mateixa a totes dues bandes i recuperem l'equació de Bernouilli per una línia de corrent.

11.4.2 Efusió de gasos. Llei de Bunsen

Una aplicació de l'equació de Bernouilli és el càlcul de la velocitat a la que s'escapa un gas quan tenim un recipient a pressió. Suposem que dins del recipient el gas té una pressió p_A, una densitat ρ, i una velocitat menyspreable. A la sortida tindrem una pressió exterior p_B que considerarem no molt diferent de p_A. D'aquesta manera podem agafar la densitat a l'exterior també igual a ρ. El gas surt amb una velocitat v_B. Aplicant l'equació de Bernouilli:

$$p_a = p_b + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Per tant la velocitat de sortida serà:

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

En l'aproximació d'un gas ideal, la densitat d'un gas s'escriu com:

$$\rho = \frac{pM}{RT}$$

Per tant com més gran és la massa molar M d'un gas, més a poc a poc s'escapa. Aquesta és una consideració important a tenir en compte en el disseny dels motors a reacció, on interessa que la velocitat a la que surten els gasos de combustió sigui la més elevada possible. Això afavoreix per exemple els reactors d'hidrogen sobre els de qualsevol hidrocarbur, doncs allibera molècules d'aigua, molt més lleugeres i ràpides que les de diòxid de carboni.

11.4.3 Efusió de líquids. Teorema de Torriceli

Suposem un dipòsit que conté un fluid i que aquest fluid s'escapa per una obertura que està a una fondària h respecte del nivell del líquid. Aplicant l'equació de Bernouilli tindrem:

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

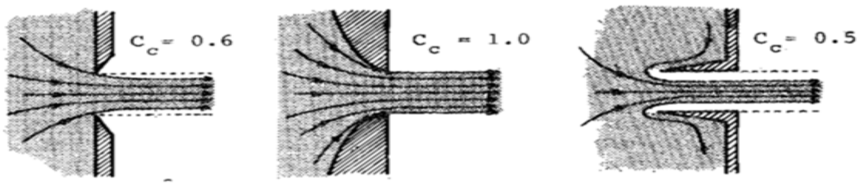
En el punt 1 podem considerar que la pressió és l'atmosfèrica, igual que en el punt 2. La velocitat en el punt 1 la podem considerar menyspreable compara amb la del punt 2. D'aquesta manera podem escriure:

$$\rho g h = +\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Per a calcular el caudal, cal tenir en compte que a la sortida, el doll d'aigua es contreu, i que aquesta contracció depèn de la forma del forat. Per això cal definir un coeficient de contracció:

$$C_c = \frac{S_c}{S}$$



on S_c és la secció del líquid contragut i S la superfície del forat per on surt el líquid. El coeficient de contracció es determina experimentalment. Per un forat de vores fines $C_c = 0.6$, per a un forat perfilat el coeficient és $C_c = 1$. Per a un tub reentrant el coeficient és $C_c = 0.5$. Per a aquest últim cas es possible deduir-ne el valor teòricament. Finalment el caudal es podrà escriure com:

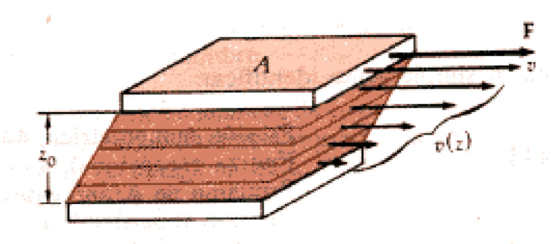
$$\mathbb{C} = C_C S \sqrt{2gz}$$

11.5 Fluids reals. Flux viscós. Equació de Navier-Stockes

11.5.1 Viscositat

Fins ara hem estat tractant amb fluids ideals. Els fluids reals presenten un comportament notablement diferent. La primera diferència notable és que la velocitat d'un fluid és zero a la superfície d'un sòlid, encara que aquest sòlid es mogui a gran velocitat, com per exemple les aspes d'un ventilador.

Quan un fluid real es mou sempre es produeix un cert fregament entre el fluid i el conducte i entre les pròpies capes del fluid. Aquest fregament es quantifica a través del concepte de viscositat que definirem a continuació. Es fa el següent experiment: dues superfícies planes separades per aigua, una se la manté estacionaria i l'altre se la fa moure amb velocitat constant. Per mantenir la velocitat constant s'observa que és necessari aplicar una determinada força que s'observa és proporcional a l'àrea de la superfície en moviment A i al cocient entre la velocitat i la distància entre les plaques v_0/d. Per tant es pot escriure:



$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d}$$

La constant de proporcionalitat η s'anomena coeficient de viscositat; la seva unitat és el N s/m^2, però encara es fa servir d'avegades el poise, que equival a 0.1 N s/m^2. El coeficient de viscositat depèn en general de la pressió i de la temperatura. Pels líquids, la viscositat disminueix amb la temperatura. Per molts líquids la dependència amb la temperatura és exponencial. En els gasos la viscositat augmenta amb la temperatura i per gasos a alta pressió augmenta també amb la pressió.

Els fluids reals presenten, doncs esforços de tall, però a diferència dels sòlids no hi ha una posició d'equilibri, mentre hi hagi força d'arrossegament hi haurà moviment a velocitat constant. No tots els líquids segueixen aquesta llei, i als que la segueixen s'els anomena fluids Newtonians.

11.5.2 Equació de Navier-Stockes

Si tenim una situació més complicada com ara una superfície prima dins d'un líquid amb les superfícies paral·leles a la direcció del fluid cal generalitzar l'expressió anterior. Haurem d'escriure:

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

En el cas d'una velocitat arbitrària hem d'escriure:

$$S_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

on S_{xy} és la força en la direcció x per unitat de superfície perpendicular a l'eix y. El conjunt de tots el S_{ij} reben el nom de tensor d'esforços. Les components del tensor d'esforços resulten ser:

$$S_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \delta_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

on η' és coneix com a segon coeficient de la viscositat. Fixem-nos que el segon terme només apareix si considerem que el fluid és compressible. Si ens interessa la força en una direcció haurem d'escriure:

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = \eta \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) =$$

$$f_i = \eta \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \eta' \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

El primer terme del parèntesi és la laplaciana i el segon i el tercer són el gradient de la divergència. Per tant finalment podem escriure:

$$\mathbf{f}_{visc} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

Finalment l'equació del moviment es pot escriure com:

$$\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\Omega\times\mathbf{v}+\tfrac{1}{2}\nabla\cdot\mathbf{v}^2\right\}=-\nabla p-\rho\nabla\phi+\eta\nabla^2\mathbf{v}+(\eta+\eta')\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})$$

És interessant considerar el cas d'un fluid incompressible i aplicar el rotacional. Obtenim:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\nabla\times(\Omega\times\mathbf{v})=\frac{\eta}{\rho}\nabla^2\Omega$$

El nou terme implica que Ω es difon a través del fluid. Aquest terme fa que un anell de fum es vagi fent més gruixut conforme avança.

11.5.3 Nombre de Reynolds. Flux laminar i flux turbulent

L'equació anterior és interessant escriure-la en forma adimensional. Suposem que volem determinar el camp de velocitats al voltant d'un avió de longitud D, o d'una esfera de diàmetre D, etc. Quan la velocitat del fluid lluny de l'objecte és V. Fem el següent canvi de variables adimensional:

$$x'=\frac{x}{L}\quad y'=\frac{y}{L}\quad z'=\frac{z}{L}$$
$$t'=\frac{D}{V}t$$
$$v_x'=\frac{v_x}{V}\quad v_y'=\frac{v_y}{V}\quad v_z'=\frac{v_z}{V}$$

Fent el canvi obtenim:

$$\frac{\partial\Omega'}{\partial t'}+\nabla'\times(\Omega'\times\mathbf{v}')=\frac{\eta}{\rho VD}\nabla'^2\Omega'$$

Totes les constants queden concentrades en un sol factor que s'escriu de la següent manera:

$$\mathbb{R}=\frac{\rho VD}{\eta}$$

on R rep el nom de nombre de Reynolds. Fixem-nos que hi pot haver-hi situacions en les que el nombre de Reynolds sigui el mateix, però els valors dels paràmetres sigui diferent. L'equació ens diu que des del punt de vista físic, totes les situacions en les que el nombre de Reynolds són iguals són equivalents, llevat de canvis d'escala. Això fa que per exemple, per dissenyar un avió es pugui treballar amb un model a escala, cosa que es pot compensar augmentant la velocitat.

Depenent del valor de R, les característiques del flux del fluid poden ser molt diferents. Per valors petits de R el flux acostuma a ser laminar. Això vol dir que el fluid flueix com si estés composat de làmines o capes que llisquen les unes sobre les altres. Si s'injecten gotes de tinta en un flux laminar, s'observa que formen una línia simple que no es dispersa en el flux (llevat de la dispersió molecular).

Quant s'augmenta el nombre de Reynolds el flux es torna turbulent. El flux turbulent és un flux desordenat. Les línies de corrent deixen de ser paral·leles entre elles i canvien en el temps. Si s'injecta tinta s'observa que es desfà en multitud de fils que es van barrejant amb el fluid. La velocitat de les partícules de fluid es pot dir que estan sotmeses a fluctuacions microscòpiques aleatòries.

En un tub de parets llises s'observa que el flux és laminar per R<2300 i que té tendència a tornar-se turbulent per R>2300. Que R superi aquest valor no garanteix immediatament que el flux sigui turbulent, si no que ho pot acabar essent quan el fluid pateixi una petita pertorbació.

11.5.4 Equació de Hagen-Poiseuille

Anem a calcular com circula un líquid viscós a l'interior d'un tub cilíndric. Suposarem que el flux és laminar, irrotacional, incompressible i estacionari. A més a més suposarem que el flux té simetria radial. Podem escriure aleshores l'equació de Navier-Stockes com:

$$\frac{1}{2}\rho\nabla\cdot\mathbf{v}^2=-\nabla p+\eta\nabla^2\mathbf{v}$$

Agafarem com a direcció de l'eix x la del flux de fluid. En aquestes condicions, el primer terme és nul, doncs la variació de la velocitat serà únicament en la component radial. Per tant podrem escriure:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_x}{dr}\right)=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}$$

El terme de l'esquerra només depèn de r i el de la dreta només depèn de x, per tant tots dos termes seran constants. Per tant serà fàcil fer la integració:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_x}{dr}\right)=\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}r$$

$$r\frac{dv_x}{dr}=\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}r^2+C_1$$

$$\frac{dv_x}{dr}=\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}r+\frac{C_1}{r}$$

$$v_x=\frac{1}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial x}r^2+C_1\ln r+C_2$$

Anem a determinar el valor de les constants. C_1 haurà d'ésser zero, doncs la velocitat no pot ser infinita per r=0. C_2 es calcula a partir de la condició de contorn que ens diu que la velocitat de l'aigua a la paret del tub és zero. Si el tub té un radi R trobarem que:

$$0=\frac{1}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial x}R^2+C_2$$

$$C_2=-\frac{1}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial x}R^2$$

Per tant, finalment podrem escriure:

$$v_x=\frac{1}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial x}(r^2-R^2)$$

Per tant tenim un perfil de velocitats parabòlic. A partir de la velocitat podem calcular fàcilment el caudal:

$$\mathbb{C}=\int_0^R v_x 2\pi r dr=\int_0^R \frac{1}{4\eta}\frac{\partial p}{\partial x}(r^2-R^2)2\pi r dr=\frac{\pi}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{2}\right)=$$

$$\mathbb{C}=-\frac{\pi}{8\eta}\frac{\partial p}{\partial x}R^4$$

Si coneixem la longitud L del tub i la diferència de pressió als extrems podem escriure:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{p_2-p_1}{L}=-\frac{\Delta p}{L}$$

amb la qual cosa l'expressió final pel caudal és:

$$\mathbb{C}=\frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta p}{L}R^4$$

Comentaris:

Fixem-nos en la dependència amb R^4. El caudal depèn fortament del radi. Si el tub té un radi la meitat, el caudal minva en un factor 16.

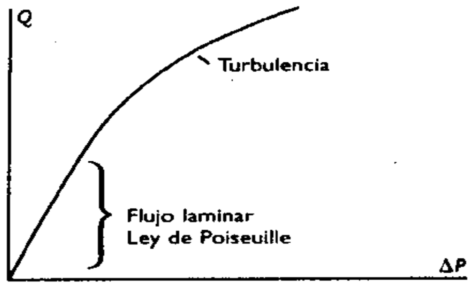
La viscositat fa que la velocitat del fluid sigui màxima en el centre del conducte i tendeixi a zero conforme ens aproximem a les parets.

La viscositat fa que hi hagi una caiguda de pressió en els conductes.

A partir de l'expressió del caudal podem calcular quina és la velocitat mitjana del fluid:

$$v_{mitjana}=\frac{\mathbb{C}}{\pi R^2}=\frac{1}{8\eta}\frac{\Delta p}{L}R^2$$

que resulta ser la meitat de la velocitat màxima.

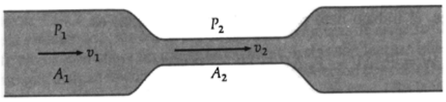


Caudal en función de la presión.

Aquesta equació només és vàlida si el flux és laminar. Si el flux es torna turbulent, aleshores deixa de ser cert que el caudal varii linealment amb la diferència de pressió. L'augment de caudal dividit de l'augment de pressió és inferior que en règim laminar. El flux turbulent és, doncs ineficient des d'un punt de vista energètic.

11.6 Aplicacions a dispositius tecnològics d'interès

11.6.1 L'efecte Venturi



Moltes de les aplicacions tecnològiques de l'equació de Bernouilli es basen en l'efecte Venturi. L'efecte venturi consisteix en la disminució de la pressió que va associada a l'augment de velocitat d'un fluid ideal. Aquest efecte es dedueix directament de l'equació de Bernouilli.

Si per exemple tenim un tub que s'estreny en un determinat lloc, sabem que la velocitat s'incrementarà. L'equació de Bernouilli ens diu que:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}v_1^2=\frac{p_2}{\rho}+\frac{1}{2}v_2^2$$

$$p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2-v_1^2\right)>0$$

Per tant si el fluid incrementa la seva velocitat disminueix la pressió.

11.6.2 Polvoritzador. Carburador.

Si fem passar un corrent d'aire suficientment ràpida a la boca molt estreta d'un tub que té l'altre extrem submergits en un líquid (aigua, perfum, benzina, etc), degut a la caiguda de pressió el líquid pujarà pel tub i sortirà en forma d'esprai o aerosol. Aquest és el principi bàsic amb el que funcionen els carburadors dels motors de combustió interna i també aparells més senzills com ara polvoritzadors.

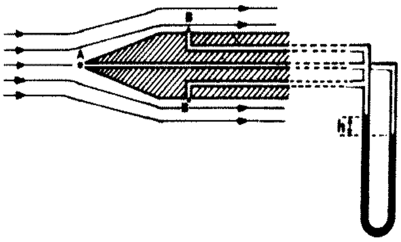
11.6.3 Trompa d'aigua.

La trompa d'aire és un sistema d'obtenció de buit. Consisteix en fer passar aigua a pressió a través d'una cavitat. Per augmentar al màxim la velocitat de l'aigua, el tub d'entrada d'aigua a la cavitat s'estreny a la seva sortida. D'aquesta manera s'obtenen pressions de dezenes de tor (corresponent a la pressió de vapor de l'aigua).

11.6.4 Disseny de les ales dels avions

El perfil de les ales dels avions (i dels ocells) és tal que la longitud de la part superior és més llarga que la longitud de la part inferior de l'ala. Això fa que l'aire circuli amb més velocitat per la part superior que l'inferior i per tant la pressió és superior a la part inferior que a la superior, obtenint-se així una important força ascensional.

11.6.5 Tub de Pitot



El tub de pitot és un instrument dissenyat per a mesurar la velocitat d'un fluid. El tub de pitot és una sonda de perfil aerodinàmic amb una obertura frontal A i dues de laterals B. L'obertura frontal A constitueix una presa de pressió total (punt d'estancament), i les altres obertures mesuren la pressió estàtica. Aplicant l'equació de Bernouilli als punts A i B tindrem:

$$p_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v^2$$

L'entrada A està connectada a un extrem d'un tub en U i les entrades B estan connectades a un altre extrem. Això permet mesurar la diferència de pressions:

$$p_A - p_B = (\rho_m - \rho)gh$$

Per tant:

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2gh(\rho_m - \rho)}{\rho}}$$

11.6.6 El comptador de Venturi

Serveix per calcular el caudal que circula per un tub. El tub és més estreta pel mig que pels costats i porta incorporada un manòmetre diferencial que permet mesurar la diferència de pressions. Aplicant l'equació de continuïtat i de Bernouilli tindrem:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Substituint la primera equació en la segona tindrem:

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho\left(S_2^2 - S_1^2\right)}}$$

La diferència de pressions donada pel manòmetre diferencial serà:

$$p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho)gh$$

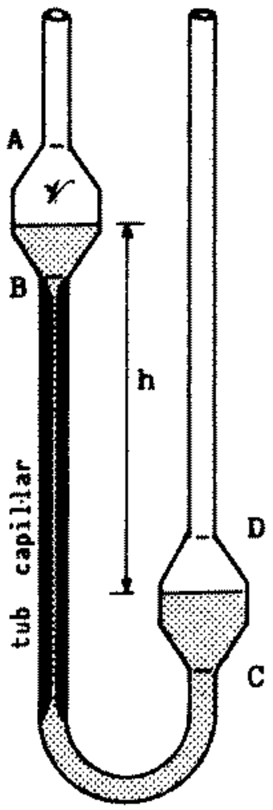
on h és la diferència d'alçades en el manòmetre. Substituint obtenim finalment:

$$v_1 = S_2\sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)gh}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

El caudal que circula pel tub és:

$$\mathbb{C} = S_1 S_2\sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)gh}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

11.6.7 Viscosímetre d'Oswald



El víscosimetre d'Oswald és un aparell que s'utilitza per mesurar el coeficient de viscositat. Primer fixem-nos en que l'equació de Hagen Poiseuille es pot reecriure com:

$$\mathbb{C} = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta p}{L}R^4 = \frac{\Delta p}{\eta k}$$

$$k = \frac{8L}{\pi R^4}$$

Si fem passar liquids diferents per un tub capilar (que ens assegura una velocitat baixa i per tant un fluxe laminar) el caudal dependrà de la diferència de pressió als extrems dividit pel coeficient de viscositat i per una constant que depèn de la geometria del capilar. Suposem que fem pasar dos volums iguals de dos fluids de densitats ρ_1 i ρ_2 i coeficients de viscositat η_1 i η_2. El fluid 1 trigarà un temps t_1 i el fluid 2 trigarà un temps t_2. El fluid 1 estarà sotmés a una diferència de pressió hidrostàtica Δp_1 i el fluid 2 a Δp_2. Utilitzant l'equació anterior per cada cas i dividint, i tenint en compte que el cocient de pressions hidrostàtiques equival al cocient de densitats arribem a:

$$\frac{V}{t_1} = \frac{\Delta p_1}{\eta_1 k} \qquad \frac{V}{t_2} = \frac{\Delta p_2}{\eta_2 k}$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\cdot\frac{t_2}{t_1}$$

Per tant, si coneixem el coeficient de viscositat d'un líquid, la densitat i el temps, podem calcular el coeficient de viscositat d'un altre líquid. Normalment es pren com a líquid de referència l'aigua.

11.7 Aplicació al sistema cardiovascular humà

El sistema cardiovascular humà està constituït per una sèrie de conductes (artèries i venes) que transporten un líquid viscós (la sang) gràcies a l'acció de bombeig del cor.

El ventricle esquerre bombeja sang a una pressió mitjana de 100 mmHg. Aquesta pressió no és constant, si no que oscil·la entre 125 mmHg (sístole) i 75 mm Hg a un ritme d'unes 75 vegades per minut. Degut a la viscositat de la sang, la pressió disminueix conforme ens allunyem del cor fins arribar un altre cop al cor, on hi arriba amb pressió pràcticament nula.

En concret l'artèria aorta, que és de gran diàmetre només pateix una pèrdua de pressió nula. En les primeres ramificacions de l'arteria aorta es perden 3 torr i en les subsegüents ramificacions la pressió baixa fins a 85 torr. A partir d'aquí neixen les arterioles. A les arterioles hi ha la caiguda de pressió més gran, de 55 tor, de manera que la sang arriba als capil·lars amb una pressió de 30 torr. En els capil·lars hi ha una pèrdua d'un 10 torr. De manera que la sang arriba a les venes amb només 10 torr de pressió. La caiguda de pressió a les venes és molt inferior que en les artèries, és només de 10 mmHg. Això és degut en part a que diversos músculs del cos (especialment les cames) actuen com a bomba de pressió per al moviment de la sang a les venes. La pressió d'arribada al cor és pràcticament nula.

La caiguda de pressió en els capil·lars és molt petita comparada amb la de les arterioles, degut al gran nombre de ramificacions que impliquen els capil·lars. Un nombre de ramificacions elevat implica una velocitat de circulació de la sang molt petita i una caiguda de pressió petita. Dins d'un cert marge, el sistema circulatori humà està dissenyat de tal manera que la caiguda de pressió per unitat de longitud sigui aproximadament constant. Anem a veure com aconsegueix això el cos humà. Suposem que una determinada artèria té un radi R_1 i que aquesta artèria es ramifica en n vasos iguals de radi R_2. L'equació de continuïtat ens diu que

$$\pi R_1^2 v_1 = n.\pi R_2^2 v_2$$

La caiguda de pressió per unitat de longitud serà:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{8\eta}{\pi}\frac{\left(\pi R_1^2 v_1\right)}{R_1^4} = \frac{8\eta}{\pi}\frac{(n\pi R_2^2 v_2)}{nR_2^4}$$

Per tant s'haurà de verificar que:

$$R_2^2 = \frac{R_1^2}{\sqrt{n}}$$

Per tant si una arteriola té 100 ramificacions, la secció total de totes les ramificacions serà 10 vegades més gran que la secció de l'arteriola.

Si es coneix el caudal i la caiguda de pressió és possible calcular, en analogia amb el flux de corrent elèctric, el que es defineix com "Resistència hidrodinàmica" del flux sanguini:

$$\mathbb{C} = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta p}{L}R^4 = \frac{\Delta p}{R_H}$$

$$R_H = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

De la mateixa manera que en electricitat, es pot calcular la resistència total de diversos conductes associats en sèrie i en paral·lel utilitzant formules anàlogues. El caudal mig de sang a l'aorta és de 5 litres/min i la caiguda de pressió és de 100 mmHg. Per tant R_H del sistema perifèric és R_H = 300 mmH.s/m^3. En el sistema circulatori pulmonar la pressió és de 15 mmHg a l'entrada i de 5mm Hg a la sortida. El caudal ha de ser estrictament el mateix, per tant la resistència és la dècima part que l'anterior. Si la resistència R_H augmenta, el cos compensa aquest augment augmentant la pressió sanguínia, produint-se hipertensió. Una causa important de la hipertensió és l'enduriment de les artèries i la formació de dipòsits a les parets de les artèries.

El sistema circulatori disposa de sistemes de control de la pressió. A les artèries més importants hi ha sensors que regulen l'activitat del cor i la resistència total del circuit per intentar mantenir constant la pressió sanguínia. Quan a una determinada part del cos necessita un aport més gran de rec sanguini, el teixit muscular llis que envolta les arterioles es relaxa. Quan això passa les arterioles augmenten la seva secció deixant passar un caudal de sang molt més important, degut el flux depèn de R^4. Per mantenir la pressió constant augmenta aleshores l'activitat cardíaca.

La potència útil que desenvolupa el cor per bombejar la sang és pot calcular fàcilment:

$$P = \frac{p\Delta V}{\Delta t} = p\mathbb{C}$$

En repòs la potència del cor és aproximadament de 1.1W per la banda esquerra i 0.1 W per la banda dreta, el que dona un total de 1.2 W. Durant un exercici intens en el que hi ha moviment muscular (com per exemple ciclisme) la pressió mitjana canvia poc, fins a un màxim de 120 mmHg però el caudal augmenta una sis vegades, i la potència total se situa al voltant de 7.2W. Si l'exercici que es realitza és isomètric (hi ha poc o nul moviment dels músculs, com per exemple en l'aixecament de pesos molt pesants) la pujada de pressió pot ser molt important, arribant a un màxim de 180 mmHg de pressió mitjana.