TEMA 10

Estàtica de Fluids.

Pressió atmosfèrica.

Diferents plantejaments en la història de la ciència al voltant del buit.

Mètodes per a l'estudi experimental de la pressió.

10

Estàtica de Fluids. Pressió atmosfèrica. Diferents plantejaments en la història de la ciència al voltant del buit. Mètodes per a l'estudi experimental de la pressió.

10.1 Definició de fluid. Propietats bàsiques.

Un fluid és una substància incapaç de resistir esforços de tall. Els fluids inclouen els líquids i els gasos. Els líquids tendeixen a ocupar les regions més baixes del recipient que els conté i els gasos tendeixen a ocupar tot el volum del recipient.

10.1.1 Propietats bàsiques dels líquids

Els líquids, degut al tipus de forces entre les seves molècules, presenten un volum definit, encara que la seva forma no ho estigui. En canviar de recipient la forma del líquid canvia, però el volum es manté constant. La densitat dels líquids varia molt poc amb la pressió. Els líquids són poc compressibles i en una bona aproximació dins d'un marge raonable de pressions se'ls pot considerar incompressibles. L'estudi de fluids incompressibles en equilibri estàtic s'anomena hidrostàtica.

10.1.2 Propietats bàsiques dels gasos

En els gasos les forces entre les molècules són molt dèbils i en primera aproximació només interactuen quan xoquen. O sigui que tendeixen a ocupar el màxim de volum possible i a més són força compressibles. La densitat dels gasos depèn molt de la pressió i de la temperatura. Pels gasos ideals aquestes magnituds es relacionen de la forma següent:

$$PV = \frac{\rho}{M} RT$$

on p és la pressió, ρ és la densitat, R = 8.31 J/mol-K, M és la massa molar (per l'aire M$\simeq$28.9 g/mol). L'estudi de fluids compressibles rep el nom d'aerostàtica.

10.1.3. Forces en un fluid. Pressió.

En l'estudi dels fluids és convenient considerar la força **f** que la gravetat fa per unitat de volum:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}_m}{dV}$$

on d$\mathbf{F}_\mathbf{m}$ és la força gravitatòria sobre el dV. Com que $\mathbf{F}_\mathbf{m}$ = m**g** on g és l'acceleració de la gravetat podem escriure:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$$

D'altra banda cal considerar també forces superficials que es caracteritzen mitjançant la pressió. Les forces superficials han de ser necessàriament normals a la superfície sobre la que actuen, doncs per definició els fluids no suporten esforços de tall. Es defineix pressió, doncs com la força normal per unitat d'àrea. La pressió en un punt vindrà donada per:

$$p = \frac{dF}{dS}$$

Una característica important de la pressió en un punt és que és la mateixa en totes les direccions. Si no fos així, seria possible obtenir forces de tall per determinades orientacions d'una superfície.

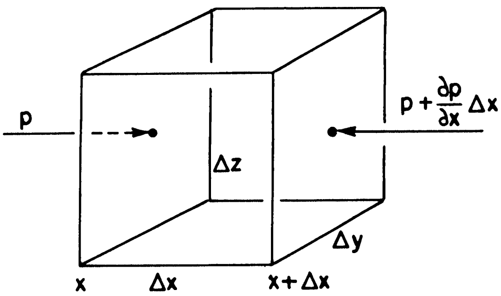
Unitats de pressió:

En el sistema internacional la unitat de pressió és el N/m^2, que rep el nom de Pascal (Pa). Es fan servir altres unitats:

El mb (milibar) 1mb = 100 Pa.
L'atmosfera (atm) 1atm = 101328 Pa = 1013,28 mb
El tor (mmHg) 1 tor = 133.326 Pa =1.333 mb

10.2 Equació fonamental de l'estàtica de fluids

La pressió en general serà una funció de la posició, és a dir, serà diferent per diferents punts del fluid. Anem a veure que els gradients de pressió generen forces.



Considerem un cub infinitesimal. La força en la direcció x ΔF_x la podrem escriure com:

$$\Delta F_x = [p(x,y,z) - p(x+\Delta x,y,z)]\Delta y \Delta z$$

Desenvolupant el segon terme ens quedarà:

$$\Delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

Escrivint $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ i fent el pas al límit ens quedarà

$$f_x = \frac{dF_x}{dV} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Fent el mateix per la resta de components obtenim:

$$\mathbf{f} = -\nabla p$$

Fixem-nos que **f** és el gradient d'un escalar. Això implica que $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ .Per tant f és un camp de forces conservatiu, condició necessària per a l'estabilitat mecànica del fluid.

El fluid normalment estarà sotmès a un camp de forces, per exemple, la força gravitatòria. La força per unitat de volum produïda per aquest camp es podrà escriure com $-\rho\nabla\phi$ on ϕ és l'energia potencial per unitat de massa. En equilibri la suma de totes les forces haurà d'ésser nula:

$$\nabla p + \rho \nabla \phi = 0$$

Aquesta equació, equació fonamental de l'estàtica de fluids, en general no té solució, doncs la densitat pot ser una funció arbitrària de les coordenades. Quan no hi hagi solució serà indicatiu de que en el fluid es produiran corrents convectius.

10.2.1 Conseqüències: Pressió en un líquid incompressible. Principi de Pascal.

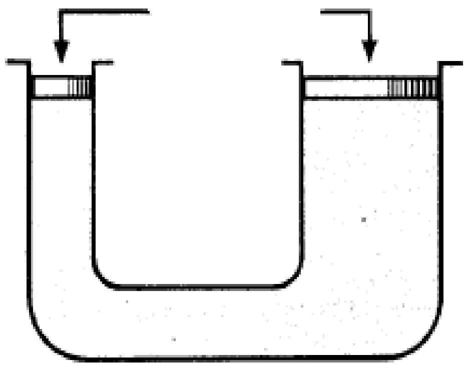
Si un líquid el considerem incompressible, ρ=cte, aleshores l'equació fonamental s'integra immediatament:

$$\nabla(\mathrm{p}+\rho\phi) = 0$$
$$p + \rho\phi = cte$$

Considerem dos punts del fluid 1 i 2. Aleshores es verificarà que:

$$p_2 - p_1 = \rho(\phi_2 - \phi_1)$$

Si la pressió augmenta al punt 1 (apliquem un pistó en un cilindre ple d'aigua) la pressió haurà d'augmentar en igual mesura al punt 1 que al punt 2 doncs s'ha de mantenir constant la diferència. D'això en diem Principi de Pascal: "Tot canvi de pressió en un punt d'un fluid incompressible es transmet íntegrament a tots els punts del fluid i a les parets del recipient que el conté".



Una aplicació important d'aquest principi és la premsa hidràulica. Si tenim dos vasos comunicants de seccions diferents A_1 i A_2 i en tots dos vassos i tenim instalat un pistó. Suposem que $A_1 < A_2$. Aleshores, si exercim una pressió p sobre el pistó 1 el pistó 2 rebrà la mateixa pressió, però com que la secció és més ample, la força també serà més gran. El guany de força serà equivalent al cocient de les seccions. La prensa hidràulica té moltes aplicacions industrials.

Si el líquid es troba a la superfície terrestre, aleshores $\phi = gz$. Substituint trobarem:

$$p = p_0 - \rho g z$$

Observem que la pressió només depèn de l'alçada i que punts de la mateixa alçada tenen necessariament la mateixa pressió. Això explica la "paradoxa hidrostàtica" en que vassos comunicants de diferents formes i seccions sempre tenen el mateix nivell d'aigua. D'aquesta manera es verifica que tots els punts a una mateixa alçada tenen la mateixa pressió.

10.2.2 Conseqüències: Pressió en un gas compressible: Variació de la pressió atmosfèrica amb l'alçada.

En un gas compressible la densitat ρ no és constant i depèn fortament de la pressió i de la temperatura. Com a exemple podem estudiar que succeix amb un gas ideal isotèrmic sota l'efecte d'un camp gravitatori (prop de la superfície terrestre):

Prenem coma punt de partida:

$$\nabla(\mathrm{p}+\rho\phi)=0$$

Prop del terra podem escriure $\phi = gz$ i la densitat es podrà relacionar amb la pressió i la temperatura amb l'equació dels gassos ideals:

$$p=\frac{\rho}{M}RT$$
$$\rho=\frac{pM}{RT}$$

on M és la massa molar del gas. Com que ϕ només depèn de z, podrem escriure directament:

$$\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{gM}{RT}p=0$$

La solució es pot escriure com una exponencial decreixent:

$$p=p_0\exp\left(-{}^{z}\!/_{z_0}\right)$$
$$z_0=\frac{RT}{Mg}$$

Per tant la pressió no decreix linealment amb l'alçada sino que ho fa com una exponencial decreixent.

10.3 Principi d'Arquimedes. Flotabilitat

El principi d'Arquimedes diu que un cos summergit total o parcialment en un fluid experimenta una força ascencional equivalent al pes del fluid desplaçat. El centre d'aplicació d'aquesta força és el centre de masses del fluit desplaçat.

La demostració del principi d'arquimedes és senzilla. Només cal considerar un volum arbitrari V a l'interior d'un fluid estàtic. La porció de fluid a l'interior de V es estàtic i per tant la suma de forces que hi actua és nula. D'una banda hi actua la força de la gravetat, que podem suposar actua sobre el centre de masses. Si aquest volum V de fluid és estàtic necessàriament hi ha d'haver una força ascencional amb mòdul equivalent al pes i aplicat sobre el centre de masses, doncs el fluid a l'interior de V té moment angular zero. Aquesta força només pot provindre del gradient de pressió al que està sotmés el volum V per part de la resta del fluid. Si substituim el volum V de fluid per un objecte qualsevol amb la mateixa forma, la força ascencional continuarà essent la mateixa, doncs la distribució de pressió dins el líquid no haurà canviat.

És fàcil calcular la força ascencional en el cas d'un fluid incompressible. Només haurem de calcular el volum V de fluid desplaçat:

$$f = \rho g V$$

Del principi d'Arquimedes deduim immediatament que els cossos amb una densitat mitjana inferior al fluid rebran una força ascencional superior al seu propi pes i per tant flotaran i en canvi els cossos amb una densitat mitjana superior a la del fluid s'enfonsaran. Si la densitat coincideix el cos podrà situar-se a qualsevol nivell del liquid.

Si un cos de volum V sura, quina proporció està summergida i quina emergida? Sigui ρ_f la densitat del fluid i ρ_c la densitat del cos. La porció del cos summergida ocuparà un volum ΔV i en aquest volum hi ha de cabre una porció de fluid de massa equivalent a la del l'objecte. Per tant s'ha de verificar que:

$$\rho_f \Delta V = \rho_c V$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho_c}{\rho_f}$$

és a dir la proporció de volum summergit és equivalent a la relació de densitats. Aquest principi és el que utilitzen els densimetres per a mesurar densitats. Un densimetre consta d'un pes situat a la part inferior i un tub de vidre graduat a la part superior. En aquest cas es pot escriure:

$$\Delta V = V_0 + S\Delta h$$

on V_0 és el volum de la part inferior del densímetre, S és la secció del tub i Δh és la longitud de tub summergida. Substuint trobem que:

$$\frac{V_0 + S\Delta h}{V} = \frac{\rho_c}{\rho_f}$$

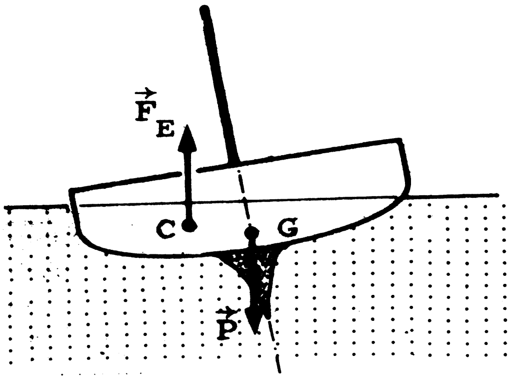
$$\Delta h = \frac{1}{S}\frac{\rho_c}{\rho_f}V - \frac{V_0}{S}$$

Com és d'esperar Δh varia linealment amb la densitat del líquid que volem mesurar.

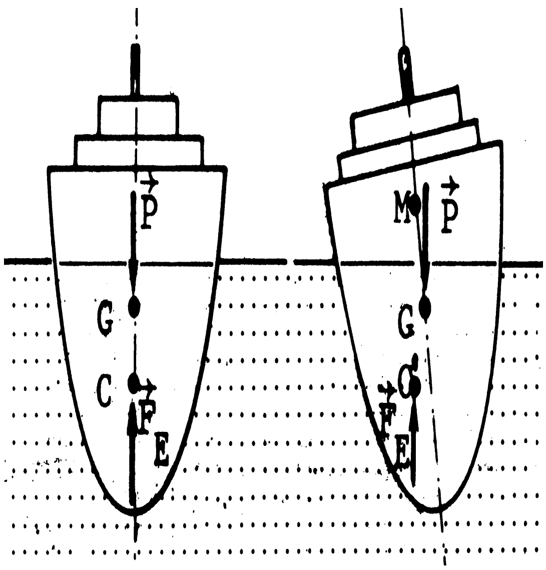
10.3.1 Estabilitat dels flotadors.

Anomenarem flotador a un cos sòlid summergit parcialment sota la superfície lliure d'un líquid (exemple un vaixell). Anomenarem carena al volum del flotador situat per sota de la linea de flotació; s'anomena centre de masses de la carena C al centre de masses del volum de la carena com si estés ple de fluid.

Els flotadors suren perquè la força ascencional igual al pes del flotador. Aquesta condició de flotació però no implica que el flotador sigui estable i no pugui sotsobrar. Per estudiar l'estabilitat del flotador caldrà determinar el centre de masses del flotador G i de la carena.



Si C es troba per damunt de G el flotador és necessariament estable. Si l'embarcació sotsobra lleugerament cap a la dreta, C' es desplaça també cap al mateix costat i el parell de forces resultant retorna el flotador a la possició inicial. Aquest és el cas de les embarcacions de regates que porten un pes a la quilla.



En el cas d'un buc, pot ser que C quedi per sota de G. En aquest cas, si el buc es desplaça lleugerament cap a un costat, C' es desplaça cap al mateix costat i el parell de forces també retorna el buc a la posició original. Fixem-nos que la condició necessària i suficient d'estabilitat és que per un desplaçament cap un costat és que la vertical que passa per C' talli per sobre de G a la línia que conté a C i a G. Com més baix és G més estable és el flotador i per això els vaixells procuren situar les parts més pesants (màquinària i mercaderies) a la part més baixa del vaixell.

10.4 Estàtica de fluids en camps de forces diferents del gravitacional.

Suposarem dos casos: quan el fluid es sotmet a una acceleració constant en la direcció x i quan es sotmet a un moviment de rotació.

10.4.1 Acceleració en una direcció arbitrària

En un sistema no inercial podem reescriure les lleis de Newton com:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}'$$

on **a'** és l'acceleració del sistema no inercial respecte d'un d'inercial. Suposem aleshores que **a'**=(a_x, a_y,a_z). Aleshores haurem de reescriure $\phi = a_x x + a_y y + (g+a_z)z$. Substituint a l'equació fonamental de la hidrostàtica:

$$\nabla p + \rho \nabla \phi = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_x = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho a_y = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho (g + a_z) = 0$$

Aquestes equacions es resolen fàcilment:

$$p = p_0 - \rho a_x x - \rho a_y y - \rho (g + a_z) z$$

Les isobares vindran donades per:

$$\rho a_x x + \rho a_y y + \rho (g + a_z) z = cte$$

És a dir són plans perpendiculars al vector -(a_x,a_y,g+a_z) = **g**-**a**. La inclinació de les isòbares i de la superfície lliure del líquid vindrà donada per:

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}{g + a_z}$$

Fixem-nos que en aquest cas la força ascensional es produeix en la direcció donada per **a**-**g**, Un objecte lligat a la base del recipient amb una corda s'inclinarà en la mateixa direcció que l'acceleració a la que estigui sotmesa. Si tenim **a** =(a_x,0,0) cap a la dreta aleshores l'objecte també s'inclinarà cap a la dreta.

10.4.2 Fluid en rotació:

En un fluid en rotació tindrem que:

$$a_r' = -\omega^2 r$$

Utilitzant l'equació fonamental:

$$\nabla p + \rho \nabla \phi = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \omega^2 r = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

Integrant obtenim immediatament:

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 - \rho g z$$

Per tant observem que la pressió augmenta molt ràpidament amb el radi i que les isòbares són paràboles.

10.5 Pressió atmosfèrica

10.5.1 Valor i efectes de la pressió atmosfèrica

L'atmosfera està composada d'una gran massa d'aire que exerceix una gran pressió sobre la superfície. La pressió atmosfèrica no és constant, depèn de les condicions meteorològiques i de l'alçada. A cada alçada se li pot fer correspondre una certa pressió mitjana. A aquesta correspondència se l'anomena Internacional Stándar Atmosphere (ISA) i es pren com a referència en aeronàutica per a la mesura d'alçades. A nivell del mar la ISA ens diu que p_o = 1013 hPa = 1013mb = 1atm. Aquesta pressió equival a 101325 N/m^2. És a dir que 1m^2 de superfície a nivell del mar suporta un pes equivalent a una massa d'aire d'unes 10 tones. Per tant la pressió atmosfèrica és molt gran.

No resulta difícil posar en evidència la importància d'una pressió tant gran. L'any 1654, Otto von Guericke va fabricar dos hemisferis de llautó, hi va fer el buit a l'interior, hi va preparar dos equips de 8 cavalls cadascun. Els 16 cavalls no van poder separar els dos hemisferis. Calcularem quina força havia de fer els cavalls com a exemple de com calcular forces sobre superfícies quan estan sotmeses a una determinada pressió.

Per calcular la força que l'atmosfera fa sobre un dels hemisferis, considerem que la força és sempre perpendicular a la superfície i que l'única component que ens interessa és la component z de la força.

Considerem el següent diferencial de superfície en coordenades polars:

$$dS = 2\pi r R d\theta \qquad r = R\cos\theta$$
$$dS = 2\pi R^2 \cos\theta d\theta$$

La força que l'atmosfera sobre el dS serà:

$$dF_z = p\sin\theta dS$$
$$dF_z = 2\pi R^2.p.\sin\theta\cos\theta d\theta$$
$$dF_z = \pi R^2.p.\sin 2\theta d\theta$$

Integrant:

$$F_z = \pi R^2.p.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\pi R^2.p.[-\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2.p$$

Suposem que R=30cm. Aleshores F=28,6 kN. És a dir, el 8 cavalls havien de fer la força necessària per arrossegar 2,9 tonelades.

10.5.2 Variació de la pressió atmosfèrica amb l'alçada

La pressió atmosfèrica depèn de l'alçada a la que ens trobem, degut a que quan pugem tenim menys aire fent pressió sobre els nostres caps. És possible fer càlculs aproximats de la ISA de la següent manera.

En primera aproximació, podem intentar calcular la variació de pressió amb l'alçada utilitzant el resultat que havíem obtingut per a un gas ideal prop de la superfície terrestre:

$$p = p_0 \exp\left(-z/z_0\right)$$
$$z_0 = \frac{RT}{Mg}$$

Si suposem que la temperatura T=15ºC, la massa molar de l'aire M=28,9 g/mol, g=9,81m/s^2, R=8,31J/K-mol, obtenim

$$z_0 = \frac{8,314\times(273.15+15)}{28,9.10^{-3}\times 9,81} = 8450m$$

Podem escriure, doncs:

$$p = 1013.\exp\left(\frac{z}{8450}\right)$$

on la pressió s'expressa en hPa o mb i l'alçada en metres. Aquesta aproximació funciona bé per alçades inferiors a 3 Km.

Per alçades superiors cal tenir en compte que la temperatura disminueix amb l'alçada. Aproximadament 6.5ºC cada 1000m. Escriurem doncs la temperatura com $T = T_0(1-\alpha z)$. Haurem de resoldre doncs:

$$\frac{dp}{dz}+\frac{pg}{RT_0(1-\alpha z)}=0$$

Per integrar aquesta equació la reescribim com:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}=-\frac{g}{RT_0}.\int_0^z\frac{1}{1-\alpha z}dz$$

La integració és immediata:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)=\frac{Mg}{\alpha RT_0}.\ln(1-\alpha z)$$

Eliminant els logaritmes podem escriure:

$$p=p_0(1-\alpha z)^{\frac{Mg}{\alpha RT_0}}$$

Els paràmetres:

$$p_0=1013mb$$
$$T_0=273.15+15=288.15K$$
$$\alpha=\frac{6.5}{1000\times 288.15}=2.255769564\times 10^{-5}$$
$$\frac{Mg}{\alpha RT_0}=\frac{0.0289\times 9.81}{2.25576\times 10^{-5}\times 8.314\times 288.15}=5.246183453$$

Aquesta aproximació hauria de ser vàlida fins al límit de la troposfera als 11 Km d'alçada. A partir d'aquesta alçada la temperatura es manté constant a -56.6ºC fins als 20Km on la temperatura començar a augmentar a raó de 0.5ºC cada 1000m. El límit real de validesa de la nostra expressió està en els 16km d'alçada.

L'expressió anterior suggereix la possibilitat de calcular l'alçada en funció de la pressió:

$$z=\frac{1}{\alpha}\left[1-\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{Mg}{\alpha RT_0}}\right]$$

Aquesta expressió és la que utilitzen els altimetres, per a poder calcular l'alçada en funció de la pressió.

10.6 Història del buit

Aristòtil va ser un dels primers pensadors que van reflexionar sobre el buit. Aristòtil va arribar a la conclusió que el buit no existia. Pensava que la Naturalesa no li agradava el buit i intentava evitar-lo de totes les formes possibles.

El primer en començar a aplicar el mètode científic a l'estudi de l'aire fou Galileu. Galileu no estava d'acord amb el postulat aristotèlic i va intentar reunir proves experimentals que demostressin que no era cert. Primer va estudiar l'aire i va demostrar que l'aire era molt lleuger però tenia una certa densitat.

La primera evidència fou que si s'ajuntaven dos vidres ben polits resultava impossible de separar-los. La interpretació de Galileu fou que es creava el buit en intentar separar els dos vidres i això originava una força que les mantenia unides. Però els aristotèlics replicaren dient que precisament per què la natura avorria el buit hi havia una força que mantenia els vidres junts.

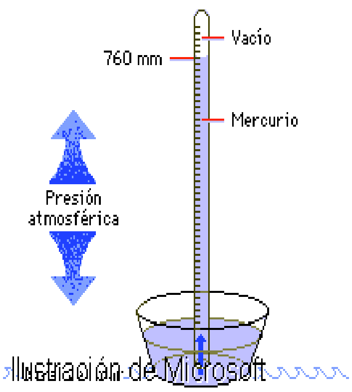
La segona evidència fou el fet que les bombes d'aigua no podien bombar aigua per damunt de 10,33m. Va provar amb diferents líquids i va trobar que l'alçada màxima a la que es podia bombar un líquid depenia de la densitat del líquid. Com més dens era un líquid a menor alçada es podia bombar. Galileu no va saber donar-hi una explicació satisfactòria. Fixem-nos que en aquella època es pensava que el buit originava forces de succió, que eren les responsables del bombament dels líquids.

Va comunicar els seus descobriments al seu ajudant Torricelli, però Galileu va morir tres mesos més tard. Torricelli va seguir estudiant el problema del vuit i va saber trobar una interpretació satisfactòria als experiments de Galileu. En agafar un tub de vidre ple de mercuri tapar-lo amb el dit i submergir-lo en una cubeta que contenia mercuri, el líquid va baixar fins a 76,2 cm. A la part superior del tub s'hi havia format el buit, però no és el buit el que succiona, és la pressió atmosfèrica sobre la cubeta la que fa pujar el mercuri fins a aquesta alçada.

10.7 Mètodes per a l'estudi experimental de la pressió

Per mesurar pressions es fan servir baròmetres. Quan es mesuren pressions fent servir com a referència la pressió atmosfèrica parlem de manòmetres.

10.7.1 Baròmetre de mercuri



Consisteix en un tub de vidre, tancat per un costat, d'uns 100cm de longitud, que es coloca verticalment en una cubeta plena de mercuri de manera que el costat obert quedi submergit a la cubeta. L'espai que es forma sobre la columna de mercuri queda ocupat per vapor de mercuri, amb una pressió totalment menyspreable en comparació a les presions que s'han de mesurar. La presió es calcula mesurant l'alçada de la columna de mercuri $p=\rho gh$. Quan varia la presió atmosfèrica canvia l'alçada de la columna i el nivell de la cubeta i per tant cal mesurar tots dos nivells i restar per trobar l'alçada.

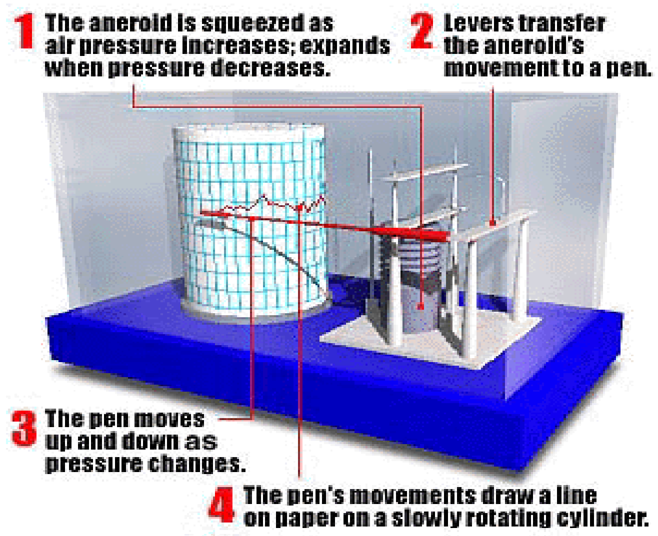
10.7.2 Baròmetre de Fortin

El baròmetre de Fortin és com l'anterior, però el nivell de la cubeta es pot controlar amb un cargol que porta a la base.

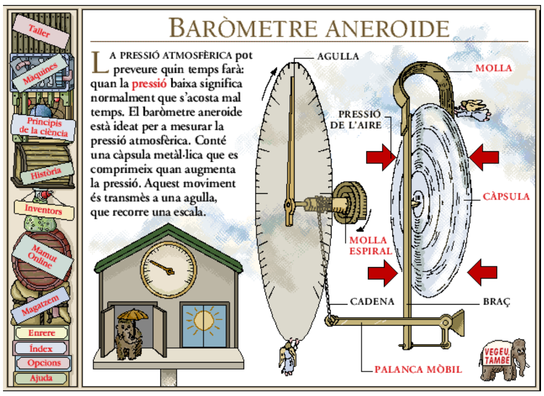
10.7.3 Baròmetre de Tonnelot

Es com el de mercuri, amb una cubeta ampla i amb una escala compensada que té en compte la variació del nivell de la cubeta.

10.7.4 Baròmetre aneroide



Quan es necessita un baròmetre robust, de reduïdes dimensions i sense tanta exactitud, es recorre als baròmetres aneroides. Els baròmetres aneroides consten d'una cambra en la que s'ha fet el buit i que pateix una deformació elàstica sota canvis de pressió. Aquesta cambra està connectada a unes palanques i d'avegades també ressorts que provoquen el moviment d'una agulla sobre una escala.



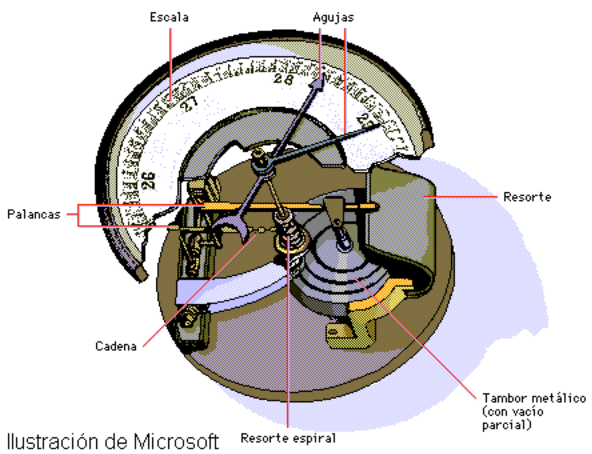


Ilustración de Microsoft

10.7.5 Manòmetre de tub obert

Consisteix en un tub en forma de U. Per una banda està exposat a la pressió atmosfèrica i per l'altre a la pressió que es vulgui mesurar. Aquest baròmetre es tant més sensible com més baixa sigui la densitat del líquid utilitzat. S'utilitza per mesurar pressions petites.

10.7.6 Manòmetre de Bourdon

És el que més s'utilitza a la indústria. Consisteix en un tub metal.lic hermètic, tancat per un extrem i enrotllat en espiral. L'extrem obert es comunica amb el fluid del que s'en vol mesurar la pressió.A l'augmentar la pressió en el tub tendeix a desenrollar-se i posar en moviment una agulla indicadora que indica la pressió sobre una escala graduada.